



Modélisation intégrée des écoulements pour la gestion en temps réel d'un bassin versant anthropisé

Simon Munier

► To cite this version:

Simon Munier. Modélisation intégrée des écoulements pour la gestion en temps réel d'un bassin versant anthropisé. Hydrologie. AgroParisTech, 2009. Français. <tel-00525756>

HAL Id: tel-00525756

<https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-00525756>

Submitted on 12 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

pour obtenir le grade de

Docteur de

**l'Institut des Sciences et Industries du Vivant et de l'Environnement
(AgroParisTech)**

Spécialité : Sciences de l'eau

présentée et soutenue publiquement par

Simon MUNIER

le 8 décembre 2009

Modélisation intégrée des écoulements pour la gestion en temps réel d'un bassin versant anthropisé

Travail réalisé au Cemagref, UMR G-EAU, F-34000 Montpellier

Devant le jury :

M. Pierre RIBSTEIN	Professeur, UPMC	Rapporteur
M. Denis DARTUS	Professeur, IMFT	Rapporteur
Mme Flavie CERNESSON	Maître de conférences, AgroParisTech	Examinatrice
M. Alexandre BAYEN	Professeur, UC Berkeley	Examineur
M. Xavier LITRICO	IGREF, Cemagref	Directeur de thèse
M. Gilles BELAUD	Maître de conférences, Montpellier SupAgro	Directeur de thèse
M. Jean-Luc TROUVAT	Ingénieur, CACG	Invité

Résumé

Pour la gestion en temps réel des étiages comme pour celle des crues, l'une des principales missions des gestionnaires de bassin consiste à prévenir les situations de crise, généralement définies par des franchissements de débits seuils en différents points stratégiques, afin d'en limiter les dégâts, tant économiques et écologiques que matériels et humains.

La thèse propose une méthodologie de synthèse et d'identification d'un modèle de simulation des débits, intégrant les phénomènes de transferts hydrauliques (propagation en cours d'eau) et hydrologiques (transformation de la pluie en débit), ainsi que les transferts relatifs aux prélèvements dans le cas des étiages. Le modèle proposé, construit dans le souci constant des contraintes de l'opérationnel telles que la robustesse face aux aléas du terrain, l'assimilation des données en temps réel ou la commande automatique des vannes de barrage, présente un module hydraulique à base physique simplifiée couplé, selon une approche semi-distribuée, à un module hydrologique global conceptuel. Cette démarche permet la prise en compte de débits latéraux non jaugés dans le transfert en cours d'eau.

L'approche est validée à travers des exemples théoriques et divers cas d'application réels : transfert en rivière soumis à l'influence de la marée, synthèse d'un contrôleur boucle ouverte sur un canal d'irrigation, simulation de débits à l'exutoire de divers bassins versants français, prévision des crues, synthèse d'observateurs d'états pour la reconstitution de prélèvements.

Mots clés : Modélisation, Hydraulique fluviale, Hydrologie, Identification, Automatique, Assimilation de données, Observateurs pour la commande

Abstract

Whether during floods or during low flow regimes, one of the main challenge of real-time river basin management is to prevent crises, generally defined by crossing flow thresholds at different strategic points, in order to limit economic, ecological, material and human damage.

The thesis proposes a methodology for synthesis and identification of a model which simulates flows, incorporating hydraulic transfers (propagation in a river stretch), hydrologic transfers (transformation of rainfall into runoff), and withdrawals in the case of low flows. The model is built under operational constraints, such as robustness against uncertainties, real-time data assimilation or automatic control of reservoirs. It is described by a semi-distributed coupling between a hydraulic module based on simplified physics, and a global and conceptual hydrological module.

The approach is validated through various theoretical examples and applications on real cases : transfer in a river stretch subject to tidal influence, synthesis of an open-loop controller on an irrigation canal, simulation of flows at the outlet of various French watersheds, flood forecasting, synthesis of state observers for the reconstitution of withdrawals.

Key words : Modeling, Open-channel hydraulics, Hydrology, Identification, Automatic control, Data assimilation, Observers

Remerciements

Si c'est un peu par hasard que j'ai fait ce premier pas dans la recherche, les trois années passées ici, au Cemagref Montpellier, m'auront convaincu de tenter l'aventure. Il va sans dire que les collègues croisés ici et là, tous autant passionnés, y sont pour beaucoup.

En particulier, je tiens à remercier chacun des membres de l'équipe ex-Transcan pour le dynamisme et la bonne humeur qui ont toujours régné dans les couloirs. Leur disponibilité permanente m'aura permis d'avancer sur les points techniques et théoriques et d'appréhender une certaine philosophie de l'hydraulique et de la recherche en général. Merci à Pierre-Olivier Malaterre pour son humour permanent et l'énergie dépensée pour le bon fonctionnement de l'équipe. Merci à Jean-Pierre Baume pour sa profonde expérience de l'hydraulique et ses remarques acérées mais qu'on écoute toujours des deux oreilles. Son sens critique sur-développé est un atout immense dans cette équipe ! Merci à José Ribot-Bruno pour son calme et sa connaissance du terrain. J'ai eu un immense plaisir à partager avec lui mon séjour au Mali. Merci à Jean Malles et David Dorchies qui, avec POM et JPB, développent le fabuleux logiciel SIC. Ils auront toujours pris le temps de répondre aux questions techniques et participé à l'animation du couloir par leurs concours de bugs. Enfin, un grand merci à Ophélie Fovet pour avoir toujours empli notre bureau d'une communicative humeur joyeuse, et pour avoir été plus stressée que moi lors des moments critiques.

Mes plus chaleureux remerciements iront à Xavier Litrico et Gilles Belaud qui ont accepté de diriger cette thèse. Il est évident que je leur dois beaucoup, tant pour leurs qualités scientifiques que leur encadrement. Leur patience et leur enthousiasme débordant (et ce malgré les multiples versions 0 que je leur ai fait subir) ont été moteur de motivation tout au long de ma thèse.

Je tiens également à remercier l'équipe hydrologie du Cemagref Antony, et plus particulièrement Julien Lerat, pour m'avoir initié à l'hydrologie, ce qui n'est pas toujours évident avec un hydraulicien. C'est également grâce à eux que j'ai pu travailler sur une exceptionnelle base de données hydrologiques, sans laquelle mon modèle n'aurait pas eu grand chose d'intégré !

Je remercie aussi l'équipe d'Alexandre Bayen de l'Université de Berkeley. Les divers projets avec Tarek Rabbani, Qingfang Wu et Saurabh Amin, m'auront permis de valider mes travaux dans des contextes variés.

Merci aux membres du jury qui m'ont fait l'honneur d'évaluer ce travail. Merci à Pierre Ribstein et Denis Dartus d'avoir accepté le rôle de rapporteur. Merci à Alexandre Bayen et Flavie Cernesson pour avoir examiné mes travaux.

Cette thèse a la prétention d'être orientée vers des applications opérationnelles, ce qui a été rendu possible grâce aux collaborations avec les gestionnaires. Je tiens donc à remercier la CACG, et notamment Patrick Hurand qui a initialisé la collaboration, et Jean-Luc Trouvat qui l'a concrétisée. Merci aussi à la DIREN Ile-de-France dont la collaboration avec le Cemagref Antony m'a permis de m'initier à la problématique de prévision des crues. Enfin, un grand merci à l'ASA Gignac, et plus particulièrement à Celine Hugodot, pour nous avoir permis d'utiliser le canal réel de Gignac pour valider nos travaux.

Je ne peux pas terminer ces remerciements sans évoquer mes proches qui ont parfois, il faut bien l'avouer, souffert plus que moi de cette thèse. Merci Marion pour ta confiance, et merci Agathe pour le sens que tu apportes à tout cela.

A Constantin

Table des matières

1	Introduction	13
1.1	Contexte	13
1.2	Gestion quantitative de la ressource en eau	13
1.2.1	Gestion des étiages	13
1.2.2	Gestion des crues	14
1.3	Les objectifs de la gestion à court terme	15
1.3.1	Prévision	15
1.3.2	Commande des ouvrages de régulation	16
1.3.3	Observation (des transferts non jaugés)	16
2	Problématique, objectifs	19
2.1	Un cadre commun	19
2.1.1	Le système considéré	19
2.1.2	Modélisation intégrée	22
2.1.3	Une gestion en temps réel	26
2.1.4	Proposition de recherche	29
2.2	Objectifs de la thèse	30
2.3	Méthodologie	30
3	Synthèse d'un modèle intégré	33
3.1	Modélisation intégrée	33
3.2	Transfert d'un débit amont	34
3.2.1	Méthodologie de synthèse d'un modèle simplifié	34
3.2.2	Notion de bief équivalent, présentation des canaux types	39
3.2.3	Effets d'une condition à la limite aval	44
3.2.4	Un modèle de transfert à 2 paramètres	55
3.2.5	Non uniformité du bief équivalent	58
3.3	Transfert d'un débit latéral	63
3.3.1	Fonction de transfert du débit latéral	63
3.3.2	Débit latéral ponctuel	64
3.3.3	Simplification de la fonction de transfert	65
3.3.4	Débit latéral uniformément distribué	70

3.3.5	Validation	73
3.3.6	Cohérence physique entre pas de temps et pas d'espace	73
3.3.7	Synthèse partielle	77
3.4	Stratégie de couplage hydraulique-hydrologie	80
3.4.1	Choix d'un modèle hydrologique	80
3.4.2	Le cas de la nappe	81
3.4.3	Découpage spatial du bassin intermédiaire	82
3.4.4	Le modèle intégré	83
3.5	Annexe : Approximation de Taylor de la fonction de transfert du modèle LBLR	85
4	Identification	89
4.1	Cadre théorique	89
4.1.1	Identifiabilité	89
4.1.2	Sensibilité	90
4.1.3	Identification	91
4.1.4	L'identification dans la thèse	92
4.2	Applications	95
4.2.1	Identification fréquentielle (Delta de Sacramento-San Joaquin)	95
4.2.2	Commande en boucle ouverte (canal de Gignac)	105
4.2.3	Couplage hydraulique - hydrologie (Tarn, Aveyron, Loue)	114
4.3	Synthèse du chapitre 4	122
4.4	Annexe : Calcul des matrices $\Gamma^{(i)}$ pour la version adimensionnelle du modèle de Sacramento	123
5	Observateurs pour la commande	127
5.1	Cadre théorique	127
5.1.1	Description du filtre de Kalman	127
5.1.2	Application au modèle TGR	129
5.1.3	Observateurs d'état	132
5.2	Prévision des crues	133
5.2.1	Contexte, objectif	133
5.2.2	Méthodologie d'analyse du modèle de prévision	134
5.2.3	Le système	137
5.2.4	Structure du modèle intégré	140
5.2.5	Identification, validation	142
5.2.6	Assimilation de données	145
5.2.7	Prévision	147
5.2.8	Conclusion	150
5.3	Observateurs d'états - reconstitution de prélèvements	151
5.3.1	Contexte, objectif	151
5.3.2	Le système	153

5.3.3	Structure du modèle intégré	156
5.3.4	Identification, validation	157
5.3.5	Observateurs d'état pour la reconstitution de prélèvements	160
5.3.6	Conclusion	164
6	Conclusions générales et perspectives	165
6.1	Synthèse des différents chapitres	165
6.1.1	Modélisation du transfert de débit dans un cours d'eau	165
6.1.2	Intégration hydraulique-hydrologique pour la gestion en temps réel	166
6.1.3	Observateurs d'états pour la reconstitution des prélèvements	167
6.2	Perspectives envisagées	167
6.2.1	Gestion des crues	168
6.2.2	Gestion des étiages	169
	Bibliographie	171
	Annexe 1 : Distributed approximation of open-channel flow routing accounting for backwater effects	181
	Annexe 2 : Closed-form Expression of the Response-Time of an Open-Channel	217

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte

Les deux facteurs de changement climatique et de croissance démographique font du problème de la gestion de l'eau un enjeu majeur du 21^e siècle. L'altération du climat se traduit entre autres par une redistribution des événements pluvieux, à la fois dans le temps et dans l'espace, provoquant par endroit des épisodes de sécheresse plus marqués et ailleurs des périodes prolongées d'intenses précipitations (Bates *et al.*, 2008, page 26). Dans le même temps, la croissance démographique engendre des besoins en eaux de plus en plus importants, augmentant les contraintes sur la ressource au cours des saisons sèches. Par ailleurs, l'expansion des villes et le développement d'infrastructures autour des cours d'eau tend à faire croître les risques dus aux inondations en termes de dégâts, tant matériels qu'humains. Par les pertes financières qu'ils occasionnent, les problèmes liés au manque d'eau ou aux fortes crues participent pour une grande part à l'effort fait par l'homme pour développer le cadre d'une gestion de la ressource toujours plus complexe intégrant des aspects très divers, tels qu'économiques (gestion du prix de l'eau, coût des ouvrages), sociologiques (gestion des pratiques, concertation), politiques, etc.

Dans nos travaux, nous nous intéresserons à la gestion physique qui concerne les écoulements de l'eau dans le milieu naturel et les zones anthropisées. Plus particulièrement, la gestion du manque (gestion des étiages) et la gestion du trop plein (gestion des crues) seront au centre de nos préoccupations.

1.2 Gestion quantitative de la ressource en eau

1.2.1 Gestion des étiages

La gestion des étiages concerne les périodes de basses eaux, c'est-à-dire lors des saisons sèches où la demande en eau est élevée par rapport à la ressource disponible. La demande se répartit globalement en trois catégories : l'alimentation en eau potable, les prélèvements pour l'industrie et ceux pour l'irrigation. A ceux-là s'ajoutent les besoins pour le tourisme et la préservation de la qualité des milieux aquatiques, traduite notamment par la notion de débit réservé inscrit dans

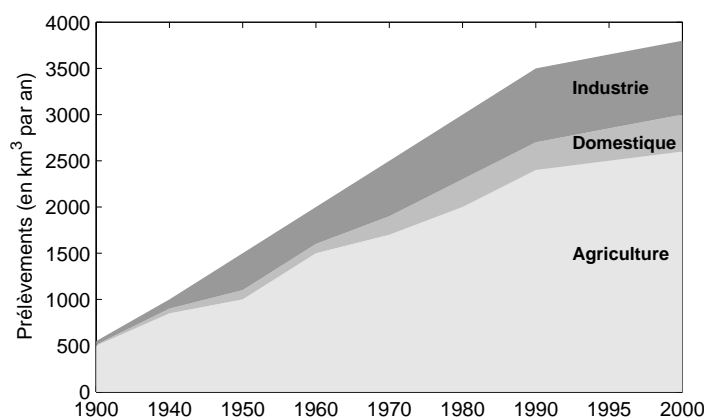


FIGURE 1.1 – Evolution des prélèvements d'eau sur le cycle naturel. Source Molle et Maraux (2008)

la loi pêche de 1984. Les prélèvements pour l'irrigation représentent de loin les plus gros volumes prélevés par l'homme dans les nappes et les rivières, soit environ 70 % (voir figure 1.1).

Cependant, l'homme n'étant pas le seul à utiliser les ressources naturelles, toute l'eau prélevée se fait au détriment de l'écosystème. Cette prise de conscience, ainsi que les situations de crise répétées, ont conduit à la définition, lors de l'élaboration des SDAGE¹, des DOE (Débit Objectif d'Etiage) qu'il faut chercher à maintenir, et DCR (Débit de CRise) en dessous duquel l'état de crise est déclenché.

Des ouvrages de stockage construits dans les parties amont de certains bassins versants ont pour but de satisfaire ces besoins concurrents tout en maintenant des débits minimum dans les cours d'eau. Les barrages-réservoirs se remplissent au cours de la saison des pluies puis sont vidangés tout au long de la saison d'irrigation selon des règles de gestion précises. Ces règles, définies entre autres par les gestionnaires de bassin, situent les actions selon trois échelles de temps :

- les actions à long terme concernent essentiellement la construction et l'entretien des infrastructures (barrages, canaux, etc.) à des horizons au-delà de la saison (pluri-annuels),
- les actions à moyen terme concernent la vidange des réservoirs à l'échelle de la saison,
- les actions à court terme se concentrent sur la satisfaction instantanée des débits de consigne, aussi bien les DOE et DCR que les débits alloués aux différents acteurs.

Nous nous intéressons ici à la gestion en temps réel, qui correspond aux actions à court terme dont nous déclinons les objectifs dans la suite.

1.2.2 Gestion des crues

Dans un registre opposé, la gestion des crues se concentre sur les périodes de hautes eaux liées à une activité pluviométrique importante. Les crues, aujourd'hui reconnues comme indispensables pour le développement de l'écosystème et la biodiversité, provoquent des inondations responsables

1. Schéma Directeur d'Aménagement et de Gestion des Eaux, défini à l'échelle de chacune des six agences de bassin (loi sur l'eau de 1992)

de la plus grande partie des dégâts causés par les catastrophes naturelles. On peut lire dans le rapport de Bates *et al.* (2008, page 37) : « Globally, the number of great inland flood catastrophes during the last 10 years (1996 - 2005) is twice as large, per decade, as between 1950 and 1980, while related economic losses have increased by a factor of five. »

Les risques liés aux inondations, augmentés à la fois par l'intensification des pluies due aux changements climatiques et par la pression exercée sur l'environnement des rivières (notamment par l'expansion des zones urbaines), peuvent être gérés de plusieurs façons, souvent complémentaires. De même que pour la gestion des étiages, on peut distinguer les actions à long terme et les actions à court terme.

Les actions à long terme concernent en premier lieu la protection contre les crues, qui consiste en l'installation et la maintenance d'infrastructures (barrages, digues) visant à atténuer les effets dévastateurs des crues. Mais les ouvrages de protection sont toujours dimensionnés par rapport à une crue type (de période de retour donnée), et vont parfois à l'encontre du fonctionnement naturel de l'écosystème. Pour ces raisons, en France, les Plans de Prévention des Risques d'Inondation (PPRI) créés en 1995, prolongent la protection des crues par la maîtrise des espaces urbains dans les zones exposées et par la recherche de zones d'expansion de crue à l'amont des bassins versants.

Les actions à court terme visent à gérer les situations de crues exceptionnelles qui dépassent le cadre de fonctionnement des ouvrages de protection. Dans ce cas, limiter les dégâts aux pertes matérielles n'est possible que si l'on peut alerter les populations suffisamment à l'avance pour pouvoir les évacuer.

1.3 Les objectifs de la gestion à court terme

Les deux problématiques de gestion des étiages et gestion des crues définissent des champs d'application très larges et *a priori* très différents, mais tous deux mettent en jeu les connaissances sur les écoulements dans un bassin versant pour des objectifs d'applications en temps réel, dont le but premier est la gestion des situations de crise.

1.3.1 Prévision

En général, les situations de crise sont définies en termes de niveaux d'eau (par exemple le niveau de la Seine au pont de l'Alma) ou de débits seuils en différents points stratégiques. Le franchissement de ces seuils permet de déclencher une alerte, qui peut se traduire par l'instauration de mesures de restriction en cas de sécheresse, ou par le lancement de plans d'évacuation des populations en cas de forte crue. Pour que ces alertes soit efficaces, elles doivent être déclenchées suffisamment à l'avance.

Ainsi, la prévision des étiages et la prévision des crues consistent à anticiper le plus tôt possible les périodes à risques, à partir des prévisions météorologiques, de l'état des réserves en eau dans le bassin versant et, pour la gestion des étiages, des prévisions de la demande en eau. Des modèles d'écoulements dans le bassin versant sont alors utilisés pour transformer les données

prévisionnelles en un débit à l'exutoire. Lorsque la prévision du débit atteint les seuils d'alerte, la situation de crise est déclenchée.

En réalité, compte tenu des incertitudes inhérentes à la prévision, les modèles fournissent un faisceau probable pour le débit à l'exutoire, la largeur du faisceau dépendant de la taille des bassins, de la qualité des prévisions météorologiques et de celle du modèle utilisé. Ces valeurs peuvent être augmentées soit par l'amélioration des prévisions météorologiques, soit par celle du modèle. Dans nos travaux, nous nous intéressons à la modélisation des écoulements ; la qualité des prévisions, en termes d'incertitudes, ne sera pas étudiée.

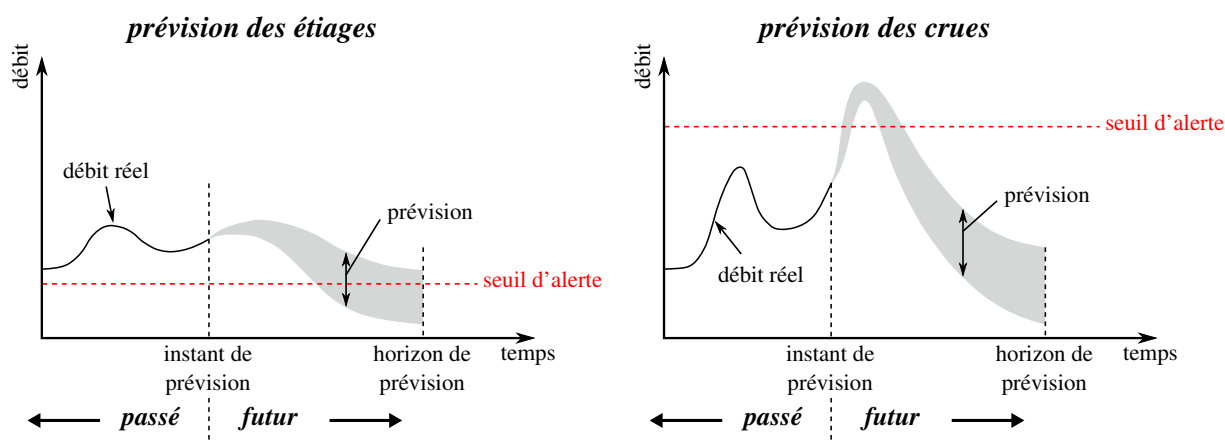


FIGURE 1.2 – Prévision des étiages et prévision des crues

1.3.2 Commande des ouvrages de régulation

Il peut être parfois possible d'éviter les situations de crise, en jouant par exemple sur les ouvrages de régulation. Dans le contexte de la gestion des étiages, il s'agit de définir les manœuvres des vannes sur tout le trajet de l'eau de façon à assurer le respect des débits de consigne. Pour ce faire, le gestionnaire dispose d'un modèle des écoulements entre les vannes et les points de consigne, lui permettant d'anticiper les lâchers en tenant compte des temps de propagation dans les cours d'eau.

En outre, un tel modèle peut être couplé avec des algorithmes automatiques permettant de contrôler les vannes à distance. L'introduction d'outils de l'automatique dans la gestion des systèmes irrigués a permis d'augmenter l'efficacité hydraulique (volume réellement utilisé / volume prélevé) de 30 % pour une gestion manuelle des canaux à près de 80 % pour une gestion entièrement automatisée (Cemagref, 1997). Toutefois, ces outils imposent un certain nombre de contraintes sur les modèles utilisés, qui doivent être adaptés au cadre particulier de l'automatique.

1.3.3 Observation (des transferts non jaugés)

La gestion à court terme des étiages concerne également la mise en place de scénarios de gestion permettant de faire face aux situations de crise en cas de sécheresse prolongée. Ces scénarios,

établis grâce à des modèles d'écoulements, permettent d'étudier l'impact de différentes configurations de lâchers et de prélèvements sur l'état des cours d'eau.

Les modèles utilisés nécessitent une connaissance approfondie du système et des transferts en jeu. Les mesures de pluies et de débits dans les cours d'eau suffisent généralement à caractériser les écoulements. Malheureusement, aujourd'hui les mesures de prélèvements fournissent les volumes prélevés à l'échelle de la saison uniquement. L'installation et la maintenance sur toutes les prises de capteurs adaptés à la gestion à court terme est une opération d'envergure, difficile à assumer par le gestionnaire. On a donc recours à des modèles pour simuler la demande en eau pour l'agriculture. Ce type de modèles reste assez peu utilisé, certainement à cause du manque de données de prélèvements pour les valider et parce qu'ils traduisent des phénomènes complexes et variés allant de l'évolution des besoins en eau de la plante aux habitudes des irrigants.

L'automatique apporte des outils permettant d'observer les états non connus d'un système à partir des mesures disponibles et d'un modèle du système adapté (Luenberger, 1971). Les observateurs d'état peuvent être utilisés pour reconstituer des chroniques de prélèvements. Ces chroniques permettent d'une part d'aider le gestionnaire à mieux comprendre son système, d'autre part de valider les modèles de prélèvements.

Dans le cadre de la gestion des crues, les observateurs d'état constituent également un outil intéressant, notamment pour reconstituer les transferts non jaugés, tels que les échanges entre la nappe et la rivière.

Cette thèse a bénéficié d'une bourse d'allocation doctorale de la région Languedoc-Roussillon. Les travaux de la thèse permettent de fournir des outils facilitant la gestion de bassins versants anthropisés. Cette problématique est particulièrement prégnante dans la région, par exemple dans la vallée de l'Hérault, où le canal de Gignac alimente un périmètre irrigué de 3000 ha.

En outre, la thèse s'inscrit dans le cadre d'une convention de recherche entre le Cemagref et la CACG (Compagnie d'aménagement des coteaux de Gascogne, notamment gestionnaire du bassin de l'Adour) dans le but d'améliorer ses modèles pour la gestion des étiages, entre autres par l'intégration des phénomènes hydrologiques dans la propagation du débit depuis la vanne jusqu'au point de contrôle, et par la reconstitution de chroniques de prélèvements.

Nos travaux ont conduit à l'élaboration d'une stratégie de couplage de modèles hydrauliques et hydrologiques adaptés à la commande automatique. Des techniques d'assimilation de données ont permis la synthèse d'observateurs d'états pour la reconstitution des prélèvements.

Le modèle intégré obtenu, couplé avec l'algorithme d'assimilation de données, répond également aux contraintes de la prévisions des crues. Il a ainsi pu être testé puis validé sur le bassin versant du Serein, affluent de la Seine, à l'occasion d'un projet conduit par la DIREN Ile-de-France visant à l'amélioration de ses modèles de prévision des crues.

La thèse s'inscrit donc dans le double contexte de la gestion des étiages et de la prévision des crues.

Chapitre 2

Problématique, objectifs

2.1 Un cadre commun

La gestion des crues et celle des étiages concernent des champs d'application opposés dans le domaine de la gestion de l'eau. Néanmoins, les modèles mis en œuvre pour atteindre les objectifs présentés précédemment peuvent être définis dans un cadre commun que nous détaillons ici en trois points : le système considéré, une modélisation intégrée et la gestion en temps réel.

2.1.1 Le système considéré

Le bassin versant intermédiaire

Pour la prévision des crues comme pour la gestion des étiages, les zones d'intérêt sont les territoires habités, cultivés ou construits, c'est-à-dire les zones anthropisées, proches des cours d'eau. Ces zones font partie de systèmes hydrologiques plus vaste : les bassins versants, définis par un exutoire (situé sur un cours d'eau principal) et la surface drainée jusqu'à cet exutoire. D'un point de vue topographique, la surface drainée est délimitée par les lignes de partage des eaux.

Pour décider du lancement d'une alerte de crue ou d'une mesure de restriction d'eau, des débits seuils sont définis en des points stratégiques sur les cours d'eau. Ces points de référence correspondent généralement à l'emplacement de stations hydrométriques fournissant débits et hauteurs d'eau à des pas de temps de l'ordre de l'heure.

Dans le contexte présent, le but de la modélisation étant de simuler ou de prévoir les débits en ces points de référence, le système considéré concernera logiquement le bassin versant à l'amont de ces points. En outre, lorsqu'une ou plusieurs stations de mesures sont disponibles à l'amont sur le cours d'eau principal ou sur les affluents, le système pourra être réduit aux limites du bassin versant intermédiaire, qui comprend les tronçons de rivière compris entre les stations amont et la station aval ainsi que la surface drainée par ces tronçons (voir figure 2.1). Cette réduction fait l'hypothèse implicite que les débits à l'exutoire des bassins amont suffisent à décrire l'influence de ces bassins sur le bassin intermédiaire.

Les stations amont peuvent également être situées au droit d'un ouvrage de régulation, tel qu'une vanne de barrage. En période d'étiage (lorsque le barrage n'est pas en surverse), la mesure de débit

à ces stations correspond aux lâchers de barrage. Dans ce cas, les écoulements dans les bassins amont et intermédiaire sont découplés (si l'on ne compte pas les écoulements souterrains).

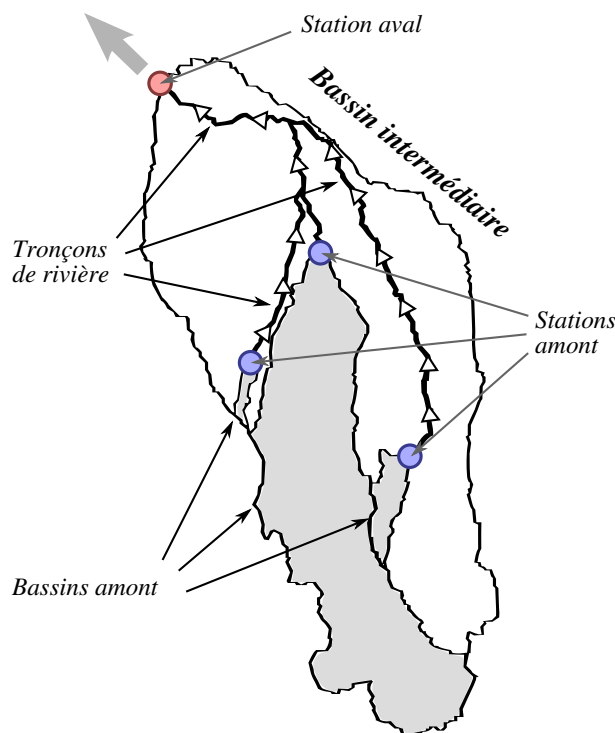


FIGURE 2.1 – Le bassin versant intermédiaire (exemple de l'Adour à l'amont d'Aire-sur-l'Adour)

Transfert amont et transferts latéraux

Le bassin intermédiaire représente un système ouvert, c'est-à-dire qu'il reçoit de l'eau de l'extérieur (par la pluie, les échanges avec les bassins voisins, les connexions entre et avec les nappes) et redistribue cette eau de différentes façons (par exemple le débit à l'exutoire). La transformation de ces entrées en sorties se déroule selon un processus complexe faisant intervenir différentes dynamiques en interaction. Le cheminement de l'eau entre son contact avec le sol et son arrivée à l'exutoire constitue une phase particulière du cycle de l'eau, comprenant de nombreux types de transferts : l'évaporation et l'interception par les plantes (évapotranspiration), les écoulements superficiels par ruissellement et dans les différents cours d'eau, l'infiltration dans les nappes superficielles et dans les nappes plus profondes, les prélèvements et rejets pour utilisation par l'homme, le stockage dans les réservoirs et les lâchers, etc.

Parmi ces transferts, on distinguera deux classes, l'une relative au cours d'eau principal reliant les stations amont et aval, et l'autre à la surface latérale drainée. Ainsi on appellera transfert d'un débit amont (ou transfert amont) le phénomène d'écoulement dans le cours d'eau principal d'un débit issu de la station amont, et transferts latéraux les différents phénomènes à l'origine des débits latéraux sur le cours d'eau principal.

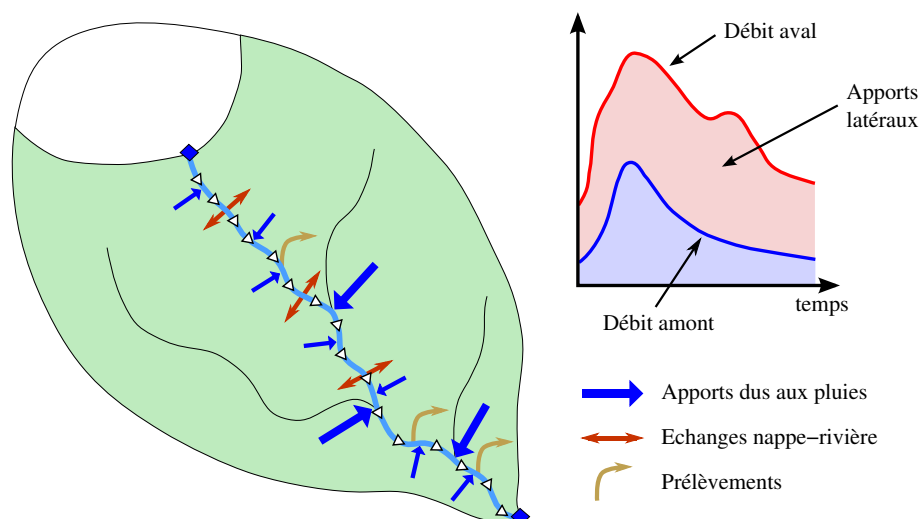


FIGURE 2.2 – Bassin versant intermédiaire : transfert amont et transferts latéraux

Transfert amont

Pour la prévision des crues, la modélisation du transfert amont permet de prendre en compte des mesures de débits intermédiaires (stations situées à l'amont du point de référence). Ces mesures apportent une information supplémentaire aux mesures pluviométriques et permettent de réduire les dimensions du bassin intermédiaire. Dans le cas des étiages, la propagation d'un débit lâché à une vanne à l'amont est également représentée par le transfert amont.

La connaissance des dynamiques de transfert dans les cours d'eau (rivières ou canaux) est primordiale à la fois pour anticiper la propagation d'une crue depuis un point de mesure vers l'aval, et pour s'assurer que les manœuvres opérées sur les vannes permettent d'atteindre les consignes fixées à l'aval.

Le modèle utilisé pour représenter le phénomène de transfert dans le cours d'eau constituera la partie hydraulique du modèle intégré.

Transferts latéraux

Le phénomène de propagation du débit amont interagit avec des phénomènes de transferts latéraux venant ajouter ou retirer un débit latéral dans le cours d'eau principal. Les transferts latéraux peuvent être de plusieurs natures (voir figure 2.2).

- Les transferts hydrologiques concernent essentiellement la transformation de la pluie en débit arrivant sur le tronçon, ainsi que les échanges entre la nappe et la rivière. La pluie étant moteur dans le processus de formation des crues, l'hydrologie constitue la base des modèles de prévision des crues. Dans le cadre de la gestion des étiages, la prise en compte de l'hydrologie permet d'améliorer l'efficacité en limitant les lâchers inutiles lors des événements pluvieux.
- En termes de volumes, les prélèvements pour la demande peuvent, lors d'étiages sévères, être prédominants par rapport aux autres transferts. Il devient alors nécessaire de les prendre en compte dans le modèle. Les prélèvements pour l'irrigation, généralement les plus importants (figure 1.1) et les moins prévisibles, seront les seuls considérés dans la suite. En revanche pour l'étude des crues, ce type de transfert n'est pas à prendre en compte.

Il est à noter que ces deux types de transfert sont décrits de la même façon du point de vue du cours d'eau principal, à savoir un débit injecté ou retiré de manière latérale répartie dans le temps et dans l'espace. Dans ce sens, il n'est pas nécessaire de connaître tout le cheminement de l'eau avant son arrivée dans le tronçon étudié.

Enfin, rappelons qu'aucune hypothèse n'a encore été faite sur la prédominance des transferts. Lors des étiages, l'hydraulique et la demande sont en général prédominants par rapport à l'hydrologie, alors que la demande devient négligeable en période de crue.

2.1.2 Modélisation intégrée

Nous avons vu que la gestion des crues comme celle des étiages nécessite l'utilisation de modèles d'écoulements, soit pour anticiper les débits futurs à l'aval du bassin, soit pour reconstruire l'état interne du système en fonction des données entrées/sorties (par exemple reconstitution des prélèvements). Pour répondre aux objectifs de gestion, ces modèles sont soumis à un certain nombre de contraintes que nous précisons ici. Dans cette partie seront abordés le type d'approche de modélisation et l'intégration de plusieurs types de transferts faisant appel à plusieurs champs disciplinaires. La partie suivante détaillera les contraintes liées à la gestion en temps réel.

Les éléments constitutifs du modèle

Dans tous nos travaux, il sera fait référence à certains termes désignant les différents éléments constituant le modèle, dont nous donnons ici quelques définitions sommaires.

- *Entrées/Sorties* : conditions aux limites du système (pluie, évapotranspiration potentielle, débit).
- *Structure* : ensemble des équations permettant de traduire le modèle en algorithme de calcul.
- *Paramètres* : constantes du modèle utilisées pour « régler » les processus traduits en équations. Les paramètres sont généralement calés à partir d'un jeu d'entrées/sorties.
- *Etats internes* : variables du modèle, pouvant décrire des grandeurs physiques (par exemple débits intermédiaires) ou n'ayant aucune signification particulière.

Enfin, le terme *modèle* désignera l'ensemble de tous ces éléments.

De nombreuses approches de modélisation

Il existe de nombreuses façons de catégoriser la modélisation. Nous discutons ici quelques critères permettant de préciser le cadre de modélisation ou auxquels nous ferons référence au cours de nos travaux.

1. Objectif de modélisation : modèle de simulation / opérationnel

Les modèles de simulation sont utilisés généralement pour étudier l'impact d'une modification sur le système (installation d'infrastructures, changements climatiques, etc.), ou pour améliorer la compréhension des processus en jeu.

Les modèles opérationnels sont, quant à eux, mis en œuvre sur le terrain et utilisés par les acteurs de l'eau (gestionnaire de bassin, services de prévision), le plus souvent en temps réel.

Les modèles de simulation ne sont pas limités par la complexité (en termes de structure, de niveau de discrétisation, de temps de calcul, etc.). Au contraire, les modèles opérationnels sont soumis à de nombreuses contraintes souvent liées à la complexité. Parmi elles, on peut citer la robustesse face aux aléas du terrain (par exemple défauts et défaillances de capteurs), la facilité d'interprétation par l'utilisateur ou les contraintes spécifiques au temps réel (point détaillé plus loin). Ces contraintes rendent difficile l'adaptation de modèles de simulation complexes à des applications opérationnelles.

Notre contexte étant celui du domaine opérationnel, le terme *simple* sera donc un maître-mot dans tous nos travaux. Il traduira à la fois la robustesse en contexte opérationnel, l'interprétabilité par l'utilisateur ou la rapidité de calcul.

2. Utilisation des connaissances du système et des données : modèle physique / conceptuel / métrique

Cette classification, utilisée notamment par Wheeler *et al.* (1993), est liée à la structure du modèle et à l'utilisation des données.

Les modèles physiques possèdent une structure fixe définie par les lois de la physique (équations différentielles et/ou aux dérivées partielles). Les paramètres, mesurés, estimés ou calés à partir des données, revêtent un sens physique et offrent ainsi une large possibilité d'interprétation des résultats, ce qui rend ces modèles particulièrement adaptés à la compréhension des processus physiques (Beven, 1989). En revanche, le nombre de paramètres et de données à traiter est généralement important, et la résolution des équations peut présenter des instabilités numériques. La sur-paramétrisation peut engendrer des problèmes d'identifiabilité, rendant le calage des paramètres délicat.

Les modèles conceptuels ont aussi une structure fixe mais de type « boîte noire » élaborée à partir de lois empiriques ou arbitraires et de l'observation du système. Ces modèles sont plus simples que les modèles physiques, mais l'interprétation des résultats est plus délicate et ils sont soumis à la perception du modélisateur.

Les modèles métriques (ou basés sur la mesure) sont également de type « boîte noire ». Leur structure n'est plus basée sur des lois physiques mais sur une analyse fréquentielle, statistique ou autre des données. Cette approche permet une grande adaptabilité, mais coupe dans le même temps tout lien avec la physique ; aucune interprétation physique des résultats n'est alors possible.

Chaque approche possède des propriétés intéressantes pour la gestion en temps réel (inter-

prétabilité, simplicité, adaptabilité). Des approches hybrides permettront de combiner ces avantages.

3. Echelle de détails : Modèle ditribué / semi-ditribué / global

Le niveau de détails du modèle traduit la taille de la maille élémentaire (ou niveau de discrétisation du système) qui peut aller du bassin versant entier pour les modèles globaux à des surfaces de quelques dizaines de m^2 pour les modèles distribués hydrologiques, voire moins pour les modèles distribués hydrauliques.

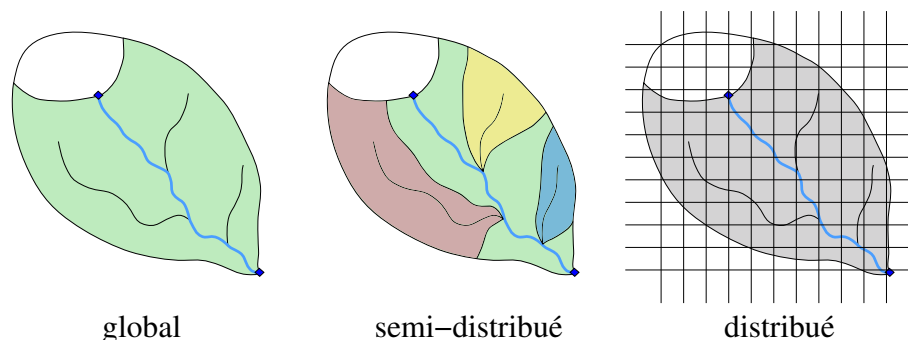


FIGURE 2.3 – Approche globale, semi-distribuée ou distribuée

La plupart des modèles distribués correspondent à la logique mécaniste des modèles physiques. Les processus sont représentés sur un grand nombre de mailles élémentaires de petite taille. Un tel degré de discrétisation permet de prendre en compte assez finement la variabilité spatiale des processus (Renner *et al.*, 2009), problème majeur de l'hydrologie, notamment pour le phénomène dévastateur des crues éclair (Estupina-Borrell *et al.*, 2006). Mais malgré leurs propriétés intéressantes, ces modèles sont gourmands en données et en temps de calcul, ce qui limite leur application en contexte opérationnel aux cas d'étude restreints et fortement instrumentés (Young, 2002; Todini, 2007).

Les modèles globaux correspondent plus à une vision systémique, ce qui les rapproche des modèles conceptuels ou métriques. Ils ne cherchent pas à propager les phénomènes à l'intérieur du système, ils ne s'intéressent qu'à la transformation entrées/sorties. Ces modèles sont plus simples et robustes que les modèles distribués, mais sont limités dans la prise en compte de la variabilité spatiale des phénomènes (par exemple en considérant une pluie uniforme sur le bassin).

Les modèles semi-distribués sont à mi-chemin entre les modèles distribués et les modèles globaux. Le système est découpé en sous-systèmes caractérisés par les mêmes types de processus et sur lesquels un sous-modèle global est appliqué. Ce type d'approche, développée entre autres par Moussa (1997) et Romanowicz *et al.* (2006), permet d'appréhender la variabilité spatiale tout en conservant les propriétés requises par la gestion en temps réel. Lerat (2009) a également suivi ce type d'approche en s'intéressant plus particulièrement à la forme sous laquelle les transferts latéraux sont injectés dans le cours d'eau principal (apports ponctuels ou distribués).

4. Linéarité : Modèle linéaire / non linéaire

La linéarité d'un modèle est une propriété intéressante car elle propose un très large panel d'outils mathématiques et automatiques éprouvés (résolution analytique, approche fréquentielle, assimilation de données, commande robuste, etc.), généralement très peu coûteux en temps de calcul. Les approches basées sur les fonctions de transfert (TF) ont été largement développées dans les domaines de l'hydraulique (Dooge *et al.*, 1987; Malaterre, 1994) et de l'hydrologie (Young, 1986).

Cependant, les phénomènes hydrauliques et hydrologiques sont connus pour leurs non linéarités importantes (variation du retard hydraulique en fonction du débit, débordements lors du remplissage des nappes, etc.). Young (1974) a démontré qu'un modèle TF linéaire (à coefficients constants) permet de décrire la dynamique du bassin versant seulement à court terme (de l'ordre d'un unique événement), alors qu'un modèle non linéaire (à coefficients variables) permet de prendre en compte les effets à plus long terme du stockage dans les réservoirs sols.

L'arrivée de l'informatique a rendu possible la résolution des équations non linéaires par des méthodes numériques. De nombreux outils linéaires ont été étendus au non linéaire, tels que les méthodes dérivées du filtre de Kalman dont il sera question plus loin. Malheureusement, ces algorithmes restent coûteux en temps de calcul et introduisent parfois erreurs et instabilités numériques.

Pour limiter ces effets incompatibles avec la gestion opérationnelle et profiter au maximum des avantages du linéaire, Young (1974) a proposé un modèle hydrologique avec une partie non linéaire décrivant la production de la pluie (la pluie nette) et une partie linéaire traduisant la dynamique de transfert.

Nous voyons que dans ces différentes approches réside un compromis traduisant le degré de complexité lié aux objectifs de modélisation. Ce compromis est à la base de nos travaux, dans lesquels nous développons des *approches hybrides* conceptuelles et physiques, semi-distribuées et semi-linéaires (couplage linéaire/non linéaire), dans le but de profiter des avantages des différentes approches tout en limitant leurs inconvénients. Il s'agit d'une première forme d'intégration, mixant des structures et des échelles fondamentalement différentes.

Des disciplines connexes

La deuxième forme d'intégration est celle des champs disciplinaires mis en jeu. En effet, autant la gestion des étiages que la gestion des crues nécessitent la modélisation de différents types d'écoulement et mettent en œuvre des disciplines diverses : l'hydraulique, l'hydrologie et l'automatique. De manière générale, l'hydraulique traduit le transfert dans les cours d'eau, l'hydrologie la transformation de la pluie en débit, et l'automatique propose des techniques de régulation et d'assimilation de données intéressantes pour la gestion opérationnelle. Dans ces trois disciplines, la littérature présente une grande variété de modèles et techniques (se référer au chapitre 3 pour les modèles hydrauliques et hydrologiques, et à la partie 2.1.3 pour les techniques d'assimilation de données).

L'association de ces champs disciplinaires a permis l'émergence de nouveaux modèles et nouvelles applications. Le transfert en cours d'eau est un processus qui participe à l'hydrologie du bassin versant. Aussi, le couplage hydraulique-hydrologie est-il venu naturellement avec l'apparition des modèles physiques distribués. L'intégration de l'automatique à l'hydraulique a débuté dans les années 1980 pour l'automatisation de la distribution de l'eau, permettant un contrôle des canaux bien plus efficace qu'une gestion manuelle en terme de volumes d'eau utilisés (Hurand et Kosuth, 1993). En outre, l'automatique a apporté à la gestion des crues des techniques d'assimilation de données évoluées, notamment le filtre de Kalman (Kalman, 1960) aujourd'hui étendu sous différentes formes adaptées au contexte numérique actuel.

Pourtant la littérature sur les modèles regroupant ces trois disciplines n'est que très récente, et par conséquent assez réduite. Ceci peut s'expliquer en partie par le fait que chaque discipline a longtemps été associée à un objectif donné. Ainsi, les modèles se sont développés sur des axes disciplinaires différents, donnant naissance à des communautés scientifiques à part entière. L'hydraulique peut être considérée comme millénaire, utilisée par de nombreuses civilisations pour l'irrigation ou l'adduction d'eau. L'hydrologie a connu un essor important avec la gestion des crues par l'importance des dégâts occasionnés lors des inondations. L'automatique s'est imposée comme domaine scientifique à partir du milieu du XX^e siècle avec le développement des télécommunications et celui des servomoteurs. Ainsi, le couplage hydraulique-hydrologie-automatique nécessite une vision tripolaire du système, chaque discipline ayant ses propres termes, sa propre conception du système et de la modélisation, ses propres enjeux et contraintes.

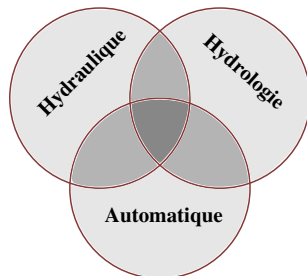


FIGURE 2.4 – Des disciplines connexes

2.1.3 Une gestion en temps réel

Le dernier point qui permet de définir un cadre commun à la gestion des crues et des étiages concerne le contexte particulier de la gestion en temps réel. Ce contexte, déjà évoqué à plusieurs reprises, impose quelques contraintes spécifiques que nous détaillons ici.

Assimilation de données

Young (2002) explique l'introduction de procédures adaptatives, telles que l'assimilation de données décrite par le filtre de Kalman (Kalman, 1960), dans les modèles de prévision des crues par la non stationnarité des processus de formation des crues (hydrologiques et hydrauliques) : « [...] no completely fixed model with constant parameters, estimated by reference to historic

rainfall-flow data, will be able to characterize the catchment behavior for all times into the future ». L'auteur souligne à cette occasion l'intérêt des approches de type fonction de transfert (TF), particulièrement adaptées à des procédures classiques telles que le filtre de Kalman.

Pour la gestion en temps réel, lorsque de nouvelles mesures sont transmises, on peut agir sur les paramètres ou les états internes pour corriger l'erreur induite par l'hypothèse de stationnarité du modèle. Les paramètres peuvent être recalés en utilisant les données les plus récentes afin de représenter au mieux l'évolution des processus. Le recalage des états internes concerne au contraire les variables du modèle. En prévision, ce recalage revient à corriger l'état initial, problème récurrent des modèles hydrologiques à cause du manque de connaissances sur le remplissage des réservoirs sol. Si l'on a une grande confiance dans le modèle, les erreurs de simulation peuvent être attribuées aux perturbations externes ou internes. Le recalage des états internes permet alors la reconstitution des perturbations qui ont pu conduire le système aux nouvelles observations.

Cette utilisation des données en temps réel est à l'origine des techniques d'assimilation de données, utilisées dans leurs débuts pour la météorologie et l'océanographie.

Refsgaard (1997) propose une revue des méthodes d'assimilation de données appliquées à la prévision en temps réel, qui peuvent aller des méthodes de type ARMA (Auto-Regressive Moving-Average) basées sur l'autocorrélation de l'erreur, aux réseaux de neurones (ANN), méthodes variationnelles (3D-VAR ou 4D-VAR) ou filtre de Kalman et dérivés.

Les méthodes ANN ou ARMA présentent des résultats intéressants, mais également plusieurs points négatifs : nombreux paramètres, difficultés d'interprétation, convergence non assurée (Romanowicz *et al.*, 2006). Ils restent assez peu utilisés en contexte opérationnel.

Les méthodes variationnelles, également appelées 3D-VAR et 4D-VAR, ont été introduites par Le Dimet et Talagrand (1986) et Courtier et Talagrand (1990) pour des applications opérationnelles en météorologie. Ces méthodes ont montré leur efficacité en océanographie opérationnelle ainsi que pour la prévision des crues (Ding *et al.*, 2004; Belanger et Vincent, 2005; Roux et Dartus, 2005; Castaings *et al.*, 2006; Munoz Sabater *et al.*, 2008; Lai et Monnier, 2009). Cependant, les méthodes variationnelles ne sont pas adaptées aux méthodes classiques du contrôle automatique.

Le filtre de Kalman (Kalman, 1960) se situe dans le domaine de l'automatique des systèmes linéaires. Il repose sur le calcul d'une matrice (appelée gain de Kalman) permettant de recalculer les états internes de façon optimale, à la fois par rapport aux données mesurées et par rapport à la confiance (ou niveau d'incertitude) que l'on peut avoir dans les différents états et les mesures. Cette notion de confiance introduit de nouveaux paramètres (hyperparamètres), généralement exprimés en terme de variance/covariance de l'erreur, et offre une souplesse d'utilisation à cet outil. On peut en effet choisir sur quel(s) état(s) faire porter la correction, ce qui peut conduire à une compréhension plus aboutie du système.

Malgré cette souplesse qui laisse les mains libres à l'utilisateur, on peut supposer qu'il existe un choix optimal de la matrice de variance/covariance de l'erreur. Plusieurs méthodes ont été proposées à cet effet, comme la décomposition de l'erreur de prévision (Schweppe, 1965) ou la méthode du grammien d'observabilité (Larminat, 1996) basée sur l'observabilité des états internes. Young et Pedregal (1999) suggèrent de mettre le même poids sur tous les états afin

d'assurer la convergence et de limiter les temps de calcul.

Restent deux restrictions majeures au filtre de Kalman : il n'est optimal que pour des processus Gaussiens (Bryson et Ho, 1969) et linéaires. Depuis une dizaine d'années, les avancées informatiques ont rendu possible diverses extensions dans les domaines de l'hydrologie et de l'hydraulique : le filtre de Kalman étendu (EKF) pour les modèles non linéaires (utilisé par Litrico (2001a)), le filtre de Kalman d'ensemble (EnKF : Evensen (1994); Madsen et Canizares (1999); Romanowicz *et al.* (2006); Strub *et al.* (2009)), le filtre de Kalman par transformée d'ensemble (ETKF : Bishop *et al.* (2001); Neal *et al.* (2009)), le filtre de Kalman par ajustement d'ensemble (EAKF : Anderson (2001)), l'intégration de modèles de prévision de l'erreur (Madsen et Skotner, 2005).

L'application de ces techniques a débuté dans les années 1980, et les exemples se sont multipliés ces dernières années. Refsgaard *et al.* (1983) présentent une application du filtre de Kalman à un modèle conceptuel pluie-débit. Da Ros et Borga (1997) proposent sur le même type de modèle différentes stratégies de recalage portant sur les paramètres, les états internes ou les conditions initiales. Roux *et al.* (2003) ont mis en œuvre les techniques du filtre de Kalman pour déterminer les paramètres hydrauliques d'un bief. Moradkhani *et al.* (2005) utilisent la procédure EnKF pour recalculer à la fois les états et les paramètres.

Malgré tout, ces extensions sont souvent complexes (par exemple par l'utilisation de la méthode de Monte Carlo), ce qui peut provoquer des problèmes d'instabilité et d'identifiabilité délicats à gérer en contexte opérationnel. Enfin, il ne semble pas s'être dégagé un réel consensus sur la meilleure méthode d'assimilation de données. Les performances semblent dépendre à la fois des bassins et des modèles.

Temps de calcul minimum

Le temps de calcul utilisé par le modèle pour lancer une simulation est un critère déterminant pour la gestion en temps réel, d'autant plus lorsque ces modèles sont utilisés conjointement avec des procédures d'assimilation de données qui ont tendance à rallonger ces temps de calcul.

Dans leur revue de littérature sur les modèles de prévision des crues, Cloke et Pappenberger (2009) rappellent que malgré l'augmentation récente de la puissance des ordinateurs, la rapidité de calcul reste une contrainte importante pour des systèmes opérationnels. Cette contrainte pose une limite à l'utilisation de modèles et techniques d'assimilation complexes utilisant de nombreuses données à traiter en temps réel (tels que les modèles distribués).

Contrôleurs robustes

Enfin, la commande automatique des systèmes barrage-rivières s'est développée depuis les travaux de Piquereau et Villocel (1982) à la CACG, poursuivis par de nombreuses études (Burt, 1987; Balogun *et al.*, 1988; Foss *et al.*, 1989; Marzouki, 1989; Rey, 1990; Roux, 1992; Sawadago, 1992; Malaterre, 1994; Kosuth, 1994; Litrico, 1999).

La robustesse permet d'assurer la stabilité ou les performances d'un contrôleur automatique lorsque le système est soumis à des perturbations ou des incertitudes. Litrico (1999) analyse

cette propriété pour des systèmes hydrauliques à une ou plusieurs entrées et sorties, et développe l'intérêt des approches TF linéaires.

Dans nos travaux, la notion de robustesse ne sera pas développée plus avant, mais l'utilisation de fonctions de transfert simples nous permettra d'assurer une robustesse maximum pour des contrôleurs basés sur notre modèle.

2.1.4 Proposition de recherche

Les approches hybrides (au sens physiques-conceptuelles, semi-distribuées et semi-linéaires) nous paraissent les plus aptes à fournir des modèles répondant aux besoins actuels de la gestion des crues et des étiages, dans la mesure où leur complexité se situe à la limite des contraintes opérationnelles (lorsqu'ils sont construits pour ces objectifs).

Les approches semi-distribuées considèrent le système comme un ensemble de sous-systèmes (sous-bassins) connectés entre eux. En général, pour la gestion opérationnelle, on ne s'intéresse pas à la dynamique interne des sous-bassins mais seulement aux débits à l'exutoire, qui pourront être modélisés à partir d'un modèle hydrologique global sur chaque sous-bassin. La connexion entre l'exutoire de chaque sous-bassin et l'aval du bassin intermédiaire (qui constitue le point d'observation) traduit la dynamique des écoulements en cours d'eau, c'est-à-dire la partie hydraulique du modèle.

Cette dernière peut être modélisée par des approches conceptuelles, mais ne permet alors pas de prendre en compte les effets d'un débit injecté (ou retiré) latéralement. Quelques auteurs ont commencé à explorer l'intégration du débit latéral dans les modèles simplifiés à base physique (Moussa, 1996; Moramarco *et al.*, 1999; Fan et Li, 2006). A partir des travaux de Moussa (1996) sur le modèle d'Hayami (Hayami, 1951) avec débits latéraux, Lerat (2009) a montré l'intérêt de pouvoir considérer plusieurs types d'apports latéraux, à savoir ponctuels et distribués (on reviendra sur ces aspects dans le chapitre 3).

Cependant, couplé avec un modèle hydrologique, le modèle d'Hayami n'est pas particulièrement adapté aux outils classiques de l'automatique, et peut présenter des problèmes d'identifiabilité sur le coefficient de diffusion (Lerat, 2009).

Le modèle d'Hayami peut être dérivé en fonction de transfert par des méthodes utilisées notamment par Dooge *et al.* (1987) et Litrico (1999). Toutefois l'intégration des débits latéraux avec ce type d'approche n'a encore jamais été développée.

Cela permettrait en outre :

- de fournir des modèles pour la commande et la régulation des cours d'eau prenant en compte d'autres transferts que les transferts hydrauliques, ce que l'on trouve assez rarement dans la littérature concernée,
- d'améliorer les modèles hydrologiques pour la prévision des crues utilisant une approche conceptuelle pour le module hydraulique,
- de proposer des outils tels que les observateurs d'état, perspective intéressante, notamment dans le contexte hydrologique pour les transferts avec la nappe qui sont généralement peu connus, et dans le contexte hydraulique pour les prélèvements.

2.2 Objectifs de la thèse

Nous proposons dans cette thèse de développer une méthodologie de synthèse d'un modèle intégré adapté au contexte de gestion en temps réel des écoulements dans les cours d'eau.

Les objectifs de thèse sont alors les suivants :

- Développer un modèle hydraulique de type TF simplifié intégrant les débits latéraux.
- Développer une méthodologie de couplage de ce modèle avec un modèle hydrologique global, adaptable à différentes configurations de bassin versant.
- Développer une procédure adaptée d'identification des paramètres.
- Mettre au point, sur le modèle intégré obtenu, les techniques d'assimilation de données et d'observateurs d'états.

2.3 Méthodologie

Comme nous l'avons précisé en 2.1.4, nous avons opté pour une approche hybride. Le modèle intégré présente un module hydrologique (conceptuel, global et en partie non linéaire) couplé à un module hydraulique (physique simplifié, distribué et linéaire).

Notre démarche se décompose en trois points, regroupés en trois chapitres.

Chapitre 3 : Synthèse du modèle intégré

Dans un premier temps, nous développons un modèle hydraulique à partir d'une approche fréquentielle des équations des écoulements à surface libre. Les équations de Saint-Venant sont linéarisées, puis simplifiées dans le domaine fréquentiel pour obtenir des fonctions de transfert simples et adaptées aux outils de l'automatique linéaire. Nous verrons que cette démarche, associée à l'introduction de nombres adimensionnels, permet de décrire le transfert du débit amont et celui des débits latéraux (développé dans les parties 3.2 et 3.3 respectivement) à partir de deux paramètres seulement. Ce modèle étant dérivé des équations de la physique, il sera validé de manière théorique à travers divers cas d'étude. Dans la partie 3.4, nous proposerons, à partir de la structure du modèle intégré présentée en début du chapitre 3 et des travaux déjà existants (notamment ceux de Lerat (2009)), une stratégie de couplage hydraulique-hydrologie. Cette approche sera validée sur des cas réels présentés dans les chapitres 4 et 5.

Chapitre 4 : Identification

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étape d'identification des paramètres du modèle, qui a pour but de trouver le jeu de paramètres le mieux adapté à un cas d'étude donné. Nous discutons de plusieurs procédures d'identification, mises en pratique à travers diverses applications. Nous discutons également des problèmes d'identifiabilité souvent liés à la sur-paramétrisation. Ce dernier point permettra de mettre en évidence, à partir d'une étude de sensibilité, l'intérêt de paramétrer le modèle judicieusement et de manière minimale. Le modèle intégré présenté au chapitre 3 sera validé sur trois bassins versants français.

Chapitre 5 : Observateurs pour la commande

Après avoir rappelé les principes théoriques du filtre de Kalman et des observateurs d'état, nous décrivons leur application au modèle intégré à travers deux cas réels. Le premier concerne le bassin versant du Serein, affluent de la Seine, ayant fait l'objet d'une étude de la DIREN Ile-de-France pour l'amélioration de la prévision des crues. Les résultats du modèle intégré seront comparés à ceux du modèle GR3P, modèle conceptuel global développé par le Cemagref pour la prévision. Le deuxième cas d'application a fait l'objet d'une convention de recherche avec la CACG en vue d'améliorer ses modèles pour la gestion du bassin de l'Adour. Nous verrons en particulier l'intérêt des observateurs d'état pour la reconstitution des prélèvements.

Chapitre 3

Synthèse d'un modèle intégré

3.1 Modélisation intégrée

Nous avons présenté en 2.1.1 le système considéré dans cette thèse, à savoir le bassin intermédiaire délimité par des stations de mesure amont et aval, et les transferts hydrauliques, hydrologiques et pour la demande. Sur la figure 3.1, nous proposons une structure simple d'un modèle intégré pour un unique bassin versant intermédiaire (voir figure 2.2). La connexion entre plusieurs bassins intermédiaires sera proposée à travers les applications du chapitre 5.

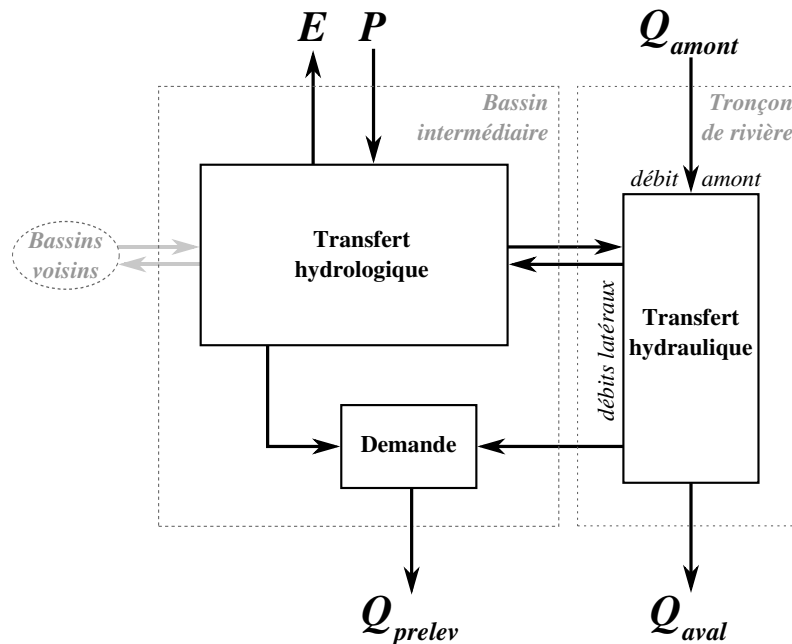


FIGURE 3.1 – Schéma conceptuel d'un modèle intégré des écoulements dans le bassin versant intermédiaire

Le module de transfert hydraulique prend comme entrées le débit amont mesuré Q_{amont} (partie 3.2) ainsi que les débits latéraux issus des autres modules, soit sous forme ponctuelle, soit sous forme diffuse, soit par une combinaison des deux (partie 3.3). Le débit aval mesuré (Q_{aval}) constitue la sortie de ce module.

La pluie (P) et l'évapotranspiration potentielle (E) sont transformés en pluie nette par le module de production. La pluie nette est ensuite séparée en un écoulement par les cours d'eau (affluents et sous-affluents du cours d'eau principal) représenté par le module de routage, et un écoulement par les nappes (infiltrations). Ces trois modules sont issus de la vision conceptuelle de l'hydrologie du bassin versant. Il est à noter que, d'une manière générale, les nappes superficielles ou profondes peuvent être connectées aux nappes des bassins voisins, comme par exemple dans les environnements karstiques. Le couplage entre les modules hydraulique et hydrologique sera décrit en 3.4.

Enfin, le module de demande traduit les prélèvements effectués en rivière ou en nappe (Q_{prelev}). Dans nos travaux, l'intégration de ce module n'apparaît qu'en perspectives. Savoir sous quelle forme ils peuvent être représentés constitue néanmoins une information importante pour la synthèse d'un observateur d'états en vue de reconstituer des chroniques de prélèvements. Les débits prélevés peuvent être pompés dans les nappes ou directement dans les cours d'eau. Dans les deux cas, l'influence qu'ils exercent sur les écoulements peut être non négligeable. Toutefois, le système considéré dans l'application présentée en 5.3 (partie du bassin amont de l'Adour) présente des prélèvements relativement concentrés et uniformément répartis dans des zones proches des cours d'eau. Aussi le cas des prélèvements en nappe ne sera pas directement abordé.

3.2 Transfert d'un débit amont

3.2.1 Méthodologie de synthèse d'un modèle simplifié

Dans cette partie, nous nous intéressons à la modélisation de la propagation d'un débit le long d'un bief. Nous considérons ici le transfert d'un débit amont, le transfert des débits latéraux sera étudié dans la partie 3.3. Nous supposons par ailleurs que le bief est délimité par deux stations hydrométriques fournissant les mesures de débit à l'amont et à l'aval. L'objectif de la modélisation du transfert débit-débit est alors de reconstituer le débit aval à partir du débit amont (figure 3.2).

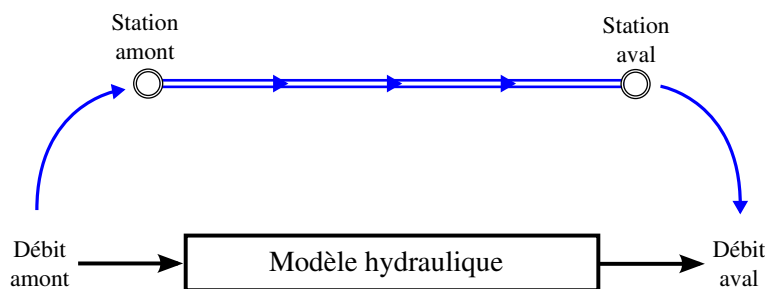


FIGURE 3.2 – Schéma du transfert débit-débit

De nombreux modèles hydrauliques

La littérature fait état de nombreux modèles hydrauliques représentant la dynamique de l'écoulement à surface libre dans un bief, et traduisant le transfert d'un débit le long de ce bief. Comme nous l'avons vu au chapitre 2, un modèle peut être plus ou moins complexe suivant les objectifs pour lequel il est construit.

Des modèles de simulation

Dans de nombreuses études hydrauliques (dimensionnement d'ouvrage, cartographie du risque d'inondation), on cherche à déterminer de façon relativement précise des niveaux d'eau atteints lors d'une crue de référence. Ces études requièrent l'utilisation de modèles distribués pour lesquels une description détaillée de la géométrie du cours d'eau est nécessaire. Des algorithmes numériques permettent la résolution des équations de la physique sur un grand nombre de mailles élémentaires. Toutefois, la complexité de tels modèles impose des temps de calcul importants et peut provoquer des instabilités numériques, ce qui en fait des modèles plus adaptés à la simulation qu'aux applications en temps réels.

Dans le cas de la gestion en temps réel, la variable recherchée est le débit en certains points stratégiques du cours d'eau. Les temps de calcul et la robustesse sont des critères essentiels qui nous amènent à développer des approches simplifiées. Du fait que l'on ne cherche pas les niveaux d'eau mais uniquement les débits en quelques points, une description fine de la géométrie n'est pas nécessaire, ce qui permet d'éviter des problèmes de résolution fréquemment rencontrés lors de la résolution des équations complètes de la physique (passages en torrentiel, problèmes de convergence, etc.). Les modèles globaux conceptuels et les modèles à base physique simplifiés correspondent à ces critères.

Des modèles globaux

Les modèles globaux ne s'intéressent qu'au débit aval. Le plus souvent, ces modèles sont conceptuels, c'est-à-dire qu'ils découlent d'une analyse des données entrées/sorties uniquement. Les paramètres de tels modèles n'ont généralement aucune signification physique. Le modèle de Muskingum (McCarthy, 1938), le modèle Lag&Route (Linsley, 1949) et ses améliorations comme le Lag&Route quadratique (Bentura et Michel, 1997) sont des modèles conceptuels fréquemment utilisés. Ces modèles seront écartés car ils ne permettent pas, par nature, l'intégration de débits latéraux. Notons toutefois qu'une extension du modèle de Muskingum prenant en compte des apports latéraux ponctuels a été proposée par O'Donnell (1985) et Khan (1993), mais ce modèle présente des problèmes de débits négatifs lors de variations brutales du débit amont (Lerat, 2009). Ce type d'approche ne sera donc pas retenu.

Des modèles physiques simplifiés

Les modèles simplifiés à base physique sont, quant à eux, obtenus par des hypothèses simplificatrices, tant sur la description du système (comme par exemple la géométrie du bief) que sur les équations de la dynamique (linéarisation, termes négligés, etc.). Ces simplifications ont plusieurs

avantages :

- elles permettent de focaliser la modélisation sur les phénomènes dominants à l'échelle du bief,
 - elles permettent de réduire le nombre de paramètres, rendant la procédure de calage plus robuste,
 - elles diminuent très fortement les temps de calcul, permettant les applications en temps réel,
 - elles peuvent être adaptées au contexte particulier de la gestion en temps réel, notamment par l'application des outils de l'automatique (par exemple assimilation, reconstitution de données).
- Finalement, nous choisirons ce type d'approche pour représenter la composante hydraulique du modèle intégré.

Un modèle simplifié à base physique : quelle méthodologie ?

Parmi les modèles simplifiés à base physique, le modèle d'Hayami (Hayami, 1951) est certainement l'un des plus connus. Ce modèle est construit à partir des équations de Saint-Venant (Saint-Venant, 1871) décrivant la dynamique monodimensionnelle des écoulements dans un bief. Ces équations sont détaillées dans la suite. Pour établir le modèle d'Hayami, les termes d'inertie ont été négligés, simplification permettant de passer des équations de Saint-Venant à l'équation de l'onde diffusante, également largement utilisée dans la littérature. Le modèle d'Hayami a l'avantage de ne posséder que deux paramètres pour décrire la dynamique dans tout le bief, mais présente quelques inconvénients dans le cadre de la thèse :

- on exclut les biefs dont la pente est très faible pour lesquels les termes d'inertie ne sont pas négligeables ;
- le coefficient de diffusion est difficile à caler (Lerat, 2009) ;
- le modèle utilise le produit de convolution, outil mathématique coûteux en temps de calcul, peu adapté aux applications en temps réel et aux outils de l'automatique.

Dooge *et al.* (1987) présentent une approche fréquentielle basée sur la linéarisation de l'équation de l'onde diffusante et la méthode des moments (Lal et Mitra, 1974). Cette approche permet d'obtenir une fonction de transfert simple reproduisant le comportement basse fréquence de la dynamique. Piquereau et Villocel (1982), Foss *et al.* (1989), Rey (1990), Malaterre (1994), Baume *et al.* (1998) et Litrico (1999) reprennent cette approche pour modéliser le transfert de débit par une fonction de transfert de type premier ou deuxième ordre avec retard, que nous appellerons modèle fréquentiel d'Hayami. Ce type de modèle permet de représenter les phénomènes de retard et d'atténuation typiques de la propagation dans un bief. En outre il est particulièrement adapté aux outils de l'automatique.

Limites du modèle fréquentiel d'Hayami

Le modèle fréquentiel d'Hayami est construit sur l'hypothèse d'un bief semi-infini à l'aval. Cette hypothèse, que l'on retrouve souvent dans les approches simplifiées, permet de repousser la condition à la limite aval à l'infini de manière à pouvoir en négliger les effets sur la dynamique. Ainsi, en ajoutant l'hypothèse de linéarisation, on obtient un régime de référence uniforme permettant la résolution analytique de l'équation de l'onde diffusante. Par contre, sous ces hypothèses, il

devient impossible de prendre en compte les ouvrages en travers (seuils, vannes) et leur influence sur la dynamique, qui peut être non négligeable (Strelkoff *et al.*, 1998).

Par ailleurs, le modèle fréquentiel d'Hayami a été établi pour le transfert entre un débit amont et un débit aval. La méthode n'a pas encore été développée pour le transfert des débits latéraux.

Méthodologie développée

Nous proposons dans cette partie de développer un modèle simplifié du transfert d'un débit amont. Nous reprenons l'approche fréquentielle à partir des équations de Saint-Venant linéarisées (avec les termes d'inertie) afin d'établir une fonction de transfert de type premier ordre avec retard, grâce à la méthode des moments déjà évoquée. Nous proposons également une méthode permettant de prendre en compte les effets de la condition à la limite aval. Le modèle de transfert retenu pour la suite, obtenu par une approche adimensionnelle, sera caractérisé par deux paramètres. Dans la partie 3.3, ce modèle sera étendu au cas du transfert des débits latéraux, approché également par des fonctions de transfert de type premier ordre avec retard. Ainsi, le transfert de chaque débit (amont et latéral) sera défini par deux paramètres : le retard et la constante de premier ordre.

Précisons à ce point l'intérêt de la démarche. Dans la mesure où le transfert du débit amont et des débits latéraux sera approché par des fonctions de transfert de type premier ordre avec retard, il serait tout à fait possible de caler les paramètres de ces fonctions lors de l'étape d'identification, ce qui ferait $2(1 + N)$ paramètres à caler, où N représente le nombre de débits latéraux considérés. Or tous ces paramètres décrivent le transfert de débit dans le même bief, et l'on peut raisonnablement supposer qu'ils sont liés aux caractéristiques de ce bief. Le but de la démarche est donc d'établir les relations entre ces paramètres et les caractéristiques d'un bief de géométrie uniforme que l'on supposera équivalent au bief réel d'un point de vue dynamique. Les paramètres à caler seront donc réduits aux caractéristiques du bief équivalent.

Cette démarche présente aussi l'avantage d'être basée sur les équations décrivant la physique de l'écoulement. Il est possible de tirer partie de cet avantage dès lors que l'on connaît les caractéristiques du bief. En effet, s'il est possible d'établir à l'avance une géométrie équivalente, les paramètres du modèle pourront être estimés sans avoir à procéder à un calage. Le nombre de paramètres à caler lors de la procédure d'identification est ainsi réduit aux paramètres des modèles relatifs aux débits latéraux.

En outre, l'approche physique offre des possibilités d'analyse et d'interprétation des résultats que ne permet pas l'approche conceptuelle. Elle permet également d'étudier l'impact sur la dynamique de modifications de certaines caractéristiques, utile notamment lors de la phase de conception d'un ouvrage.

Notations et équations de Saint-Venant

Dans la suite, les notations utilisées sont les suivantes :

- g l'accélération de la pesanteur [m/s²],
- t la variable de temps [s],
- x la variable d'espace [m],
- Q le débit [m³/s],
- q_l le débit latéral par unité de longueur [m²/s] ($q_l > 0$ si apports),
- Y la hauteur d'eau [m],
- S_f la pente de frottement [m/m],
- A la section mouillée [m²],
- T la largeur au miroir [m],
- P le périmètre mouillé [m],
- R le rayon hydraulique [m] ($R = A/P$),
- V la vitesse moyenne de l'écoulement [m/s] ($V = Q/A$),
- C la célérité des ondes de gravité [m/s] ($C = \sqrt{gA/T}$).

Les équations de Saint-Venant décrivent la dynamique de l'écoulement dans un bief à partir des hypothèses suivantes (Saint-Venant, 1871) :

- l'écoulement est unidimensionnel ;
- la pente S_b du canal est suffisamment faible pour que l'approximation $\sin S_b \approx S_b$ soit bonne ;
- la masse volumique de l'eau est considérée comme constante ;
- la répartition des pressions est hydrostatique ;
- les effets de la viscosité interne sont négligeables devant les frottements externes.

Sous ces hypothèses, les équations de Saint-Venant (3.1-3.2) traduisent la conservation de la masse (équation de continuité) et la conservation de la quantité de mouvement, respectivement.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_l \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q^2/A}{\partial x} + gA \frac{\partial Y}{\partial x} + gAS_f = q_l V \quad (3.2)$$

La pente de frottement est représentée par la formule de Manning-Strickler :

$$S_f = \frac{n^2 Q^2}{A^2 R^{4/3}} \quad (3.3)$$

où n est le coefficient de Manning (en sm^{-1/3}), égal à l'inverse du coefficient de Strickler.

Dans la suite, le terme $q_l V$ sera négligé, considérant que les transferts latéraux se feront soit perpendiculairement au sens de l'écoulement (apports d'un affluent, prélèvements pour l'irrigation), soit à des vitesses relativement faibles (échanges nappe-rivière), et donc sans influence sur la quantité de mouvement.

Remarque : l'équation de l'onde diffusante, utilisée dans le modèle d'Hayami, est obtenue en négligeant les termes d'inertie $\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q^2/A}{\partial x}$ dans l'équation (3.2).

3.2.2 Notion de bief équivalent, présentation des canaux types

Les équations (3.1-3.2) sont des équations aux dérivées partielles hyperboliques, du premier ordre et non-linéaires. Elles ne connaissent pas de solution analytique et doivent donc être simplifiées ou discrétisées pour pouvoir être résolues. L'une des simplifications classiquement utilisées est que l'on suppose la géométrie du bief uniforme, voire prismatique de section trapézoïdale. Cette configuration peut correspondre à certains canaux, ou parties de canaux, mais de manière générale, les biefs étudiés ont une géométrie qui varie, parfois significativement, avec l'abscisse longitudinale x , en termes de section, de pente ou de rugosité. Ainsi, bien que le modèle développé ici soit basé sur les équations de la physique, il est bien clair que l'on travaille sur un bief équivalent du point de vue de la dynamique de transfert du débit. Les variations de la géométrie peuvent être prise en compte dans les modèles couramment utilisés en hydraulique fluviale, tels que SIC, HEC-RAS ou MIKE, mais ces modèles, basés sur une résolution numérique des équations de Saint-Venant discrétisées, sont de ce fait, comme nous l'avons justifié, peu adaptés au contexte de gestion intégrée en temps réel.

Toutefois, un modèle de Saint-Venant complet sera utilisé afin de valider le modèle simplifié développé par la suite. La validation se fera sur des cas théoriques de manière à évaluer la capacité du modèle à reproduire la dynamique de propagation du débit.

Présentation des canaux types

Pour la validation théorique du modèle de transfert, nous utiliserons des canaux types de caractéristiques différentes présentant des comportements dynamiques différents. Ces canaux types ont une géométrie prismatique trapézoïdale et sont décrits par les variables suivantes :

Q_R le débit de référence [m^3/s],

X la longueur du bief [m],

B la largeur au fond [m],

m le fruit des berges [m/m],

S_b la pente du fond [m/m],

n le coefficient de Manning [$\text{s}/\text{m}^{1/3}$],

Y_n la hauteur normale [m] (obtenue par l'équation (3.3)).

Les caractéristiques de ces canaux sont présentées dans le tableau 3.1. Les trois premiers canaux sont issus des travaux de Baume *et al.* (1998). Le canal C1 représente un canal court oscillant, correspondant plutôt au cas d'un canal qu'à celui d'un bief de rivière. Le canal C2 représente un canal long retardé et C3 un canal long avec un nombre de Froude F élevé ($F = V/C$). Le quatrième canal traduit le cas particulier d'un canal rectangulaire large, hypothèse fréquemment rencontrée en modélisation hydraulique simplifiée.

Bief	Q_R	X	B	m	S_b	n	Y_n
C1	14	3000	7	1.5	0.0001	0.02	2.12
C2	80	6000	8	1.5	0.0008	0.02	2.92
C3	2	1200	1	1.5	0.002	0.014	0.62
C4	10	10000	15	0	0.001	0.04	0.81

TABLEAU 3.1 – Caractéristiques des canaux types

Une méthode de recherche d'une géométrie équivalente

Nous avons déjà signalé que l'un des intérêts de l'approche à base physique était de pouvoir déterminer les paramètres du modèle de transfert en dehors de la procédure de calage, permettant ainsi de réduire les problèmes d'identifiabilité liés à un nombre important de paramètres à caler. Comment déterminer alors une géométrie équivalente sans utiliser les données en débit qui serviront pour le calage des autres paramètres ?

Il n'est pas évident d'établir une méthode générique répondant à cette question, et là n'est pas l'objectif de cette thèse. Nous présentons ici une méthode simple de recherche d'une géométrie équivalente à travers le cas de deux biefs réels du canal de Gignac. Cette méthode sera améliorée par la suite lors de l'étude de l'influence des ouvrages en travers. Le canal de Gignac, situé dans la vallée de l'Hérault, présente un linéaire d'environ 50 km et domine un périmètre irrigable de 3000 ha, dont une bonne partie pour l'irrigation de la vigne. Il est actuellement partiellement automatisé et est utilisé notamment par le Cemagref pour tester et valider différents algorithmes de contrôle automatique. Le premier bief s'étend de la station de Belbezet jusqu'à la station du Partiteur, ce qui représente une longueur de 4272 m avec 94 profils en travers. Le deuxième bief est délimité par les stations de Gignac et Aurelle, soit une longueur de 7223 m avec 301 sections en travers. Ces biefs possèdent une géométrie non uniforme mais proche du cas théorique prismatique trapézoïdal.

L'obtention d'une géométrie équivalente se fait en deux temps. Tout d'abord, la pente du bief est obtenue en minimisant l'écart quadratique entre la cote du fond réelle et celle approchée. Pour déterminer la section équivalente, nous avons tracé les courbes largeur-cote de chaque section, et cherché la section trapézoïdale équivalente qui minimise l'écart quadratique entre les profils réels et le profil équivalent, pondéré par la longueur entre chaque section en travers.

Enfin, pour les deux biefs, le coefficient de Manning est fixé à 0.025, valeur correspondant à un revêtement en béton grossier (Lencastre, 2005).

Les résultats sont présentés dans le tableau 3.2 et illustrés sur les figures 3.3 et 3.4.

Bief	Q_R	X	B	m	S_b	n	Y_n
Gignac 1	1.5	4272	2.56	0.5	0.0004	0.025	0.81
Gignac 2	0.5	7223	0.93	1.11	0.00029	0.025	0.77

TABLEAU 3.2 – Caractéristiques des biefs équivalents du canal de Gignac

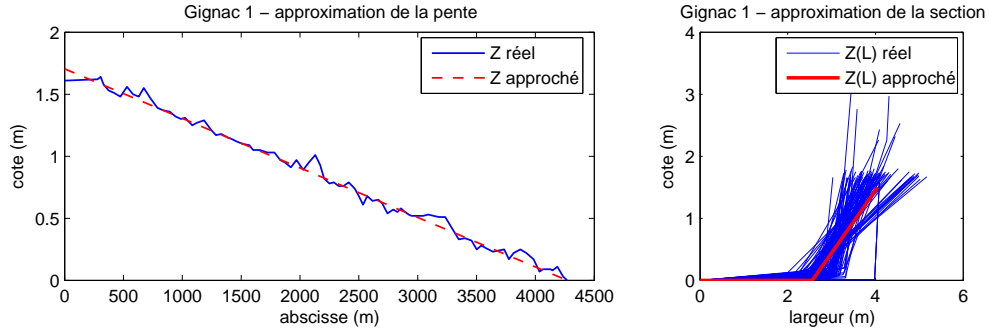


FIGURE 3.3 – Géométrie équivalente pour le bief Gignac 1 (Z représente la cote du fond, L la largeur)

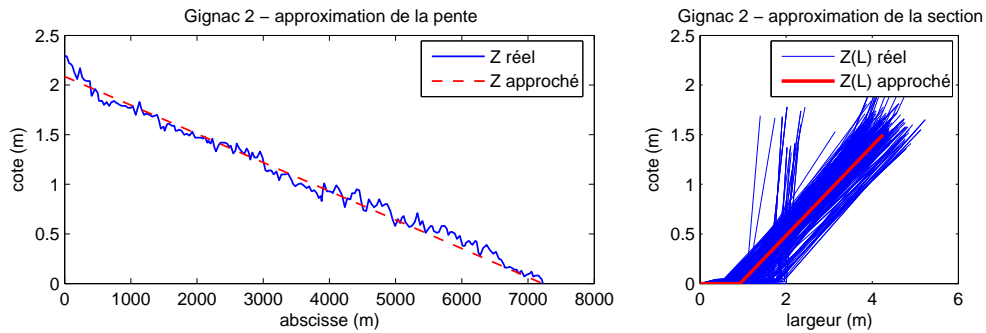


FIGURE 3.4 – Géométrie équivalente pour le bief Gignac 2 (Z représente la cote du fond, L la largeur)

Quelques illustrations

Dans cette section, nous présentons quelques résultats obtenus par le modèle d'Hayami afin d'étayer la notion de bief équivalent d'une part, et d'autre part de montrer la validité de ce modèle ainsi que ses limites.

Le modèle d'Hayami est validé à l'aide du logiciel SIC développé au Cemagref Montpellier (Baume *et al.*, 2005). Ce logiciel utilise un schéma implicite de Preissmann pour résoudre numériquement les équations de Saint-Venant discrétisées. Le logiciel SIC sera également utilisé par la suite pour valider les différentes approches de modélisation hydraulique, étant donné qu'il permet la prise en compte des débits latéraux (poncutels et diffus) et des ouvrages en travers. Dans toutes les simulations, le pas de temps Δt et le pas d'espace Δx sont déterminés afin de garantir un nombre de Courant¹ proche de 1 de manière à limiter les phénomènes de diffusion numérique.

Comme nous l'avons déjà précisé, le modèle d'Hayami utilise l'hypothèse d'un bief semi-infini afin de négliger l'influence de la condition à la limite aval. Cette hypothèse est simulée sous SIC en prolongeant le bief d'une longueur égale à trois fois la longueur d'origine (figure 3.5).

Le modèle d'Hayami est utilisé dans un premier temps sur les quatre canaux types définis pré-

1. Le nombre de Courant est défini par (Cunge *et al.*, 1980) :

$$Cr = (V + C) \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

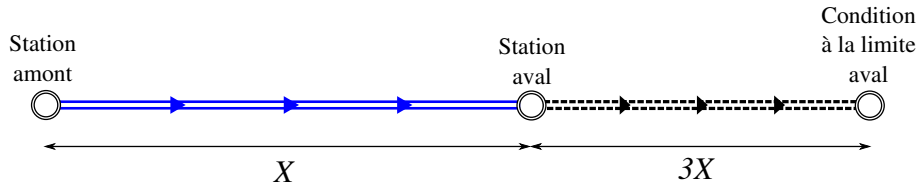


FIGURE 3.5 – Simulation d'un bief semi-infini

cédemment pour simuler la réponse à une entrée de type créneau, d'amplitude 10 % du débit de référence. La résolution numérique du modèle est obtenue par un produit de convolution entre le signal d'entrée et le noyau d'Hayami Ker_{Hay} défini par l'expression :

$$Ker_{Hay}(x, t, C_e, D_e) = \frac{x}{2t^{3/2}\sqrt{\pi D_e}} e^{-\frac{(x-C_e t)^2}{4D_e t}} \quad (3.4)$$

où C_e et D_e représentent respectivement les coefficients de convection et de diffusion pour le régime de référence. Pour un bief prismatique trapézoïdal, ces coefficients sont obtenus par :

$$C_e = \frac{Q_R}{3T} \left(\frac{5T}{A} - \frac{4}{P} \sqrt{1+m^2} \right) \quad (3.5)$$

$$D_e = \frac{Q_R}{2TS_b} \quad (3.6)$$

La figure 3.6 présente les réponses obtenues avec le modèle d'Hayami et le logiciel SIC pour les quatre canaux types. Ces résultats montrent que le modèle d'Hayami permet de reproduire avec une très bonne précision la dynamique de l'écoulement dans les quatre cas.

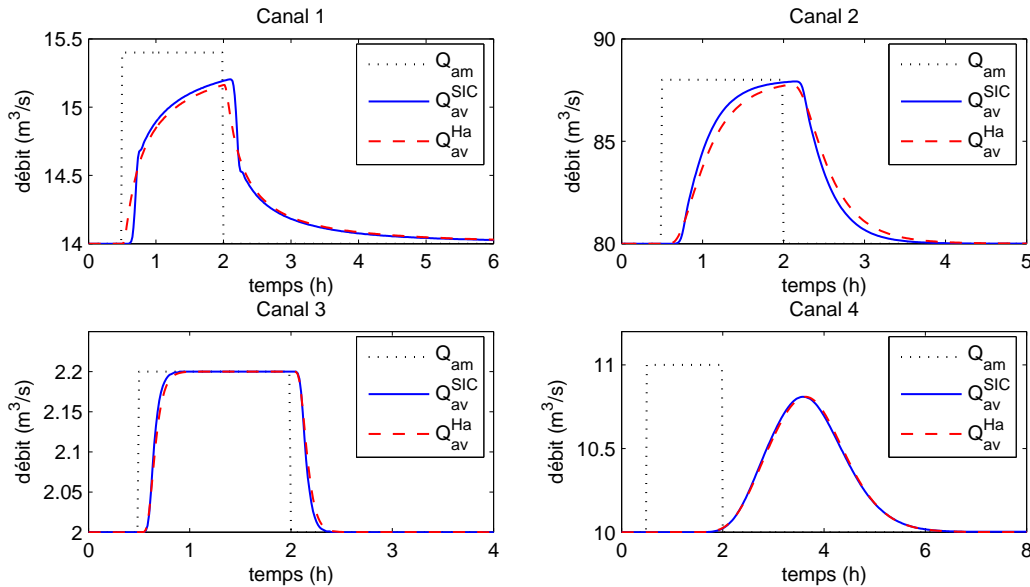


FIGURE 3.6 – Comparaison des réponses par le logiciel SIC et le modèle d'Hayami à une entrée créneau pour les canaux types.

La même démarche a été appliquée au premier bief de Gignac. La réponse par le modèle d'Hayami

est obtenue avec les caractéristiques du bief équivalent. Cette réponse est comparée aux résultats du logiciel SIC sur le bief réel rallongé, pour simuler un bief semi-infini, par une portion trois fois plus longue que le bief considéré et de géométrie correspondant à la géométrie équivalente déjà établie. La figure 3.7 montre les résultats au milieu et à l'aval du bief. On peut voir que la méthode simple d'estimation d'une géométrie équivalente permet d'obtenir de très bons résultats.

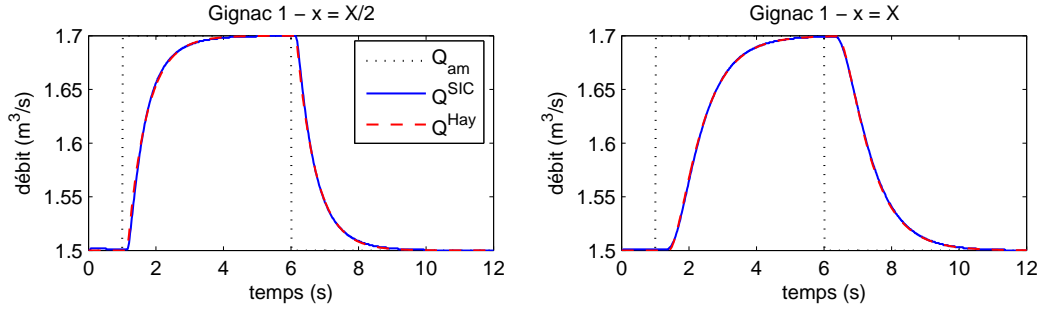


FIGURE 3.7 – Comparaison des réponses en $x = X/2$ et $x = X$ par le logiciel SIC et le modèle d'Hayami à une entrée créneau pour le bief Gignac 1 semi-infini

Cependant, le bief Gignac 1 possède une vanne à l'aval et le bief Gignac 2 dix seuils et vannes en des positions différentes. Ces ouvrages en travers créent des conditions d'écoulement éloignées du cas uniforme correspondant à l'hypothèse d'un bief semi-infini, notamment par la courbe de remous qu'ils induisent (figure 3.8). Le logiciel SIC permet de modéliser l'impact de ces ouvrages sur l'écoulement. Les résultats du modèle d'Hayami pour les biefs équivalents (et semi-infinis) Gignac 1 et 2 sont comparés à ceux du logiciel SIC avec les ouvrages en travers sur les figures 3.9 et 3.10 respectivement.

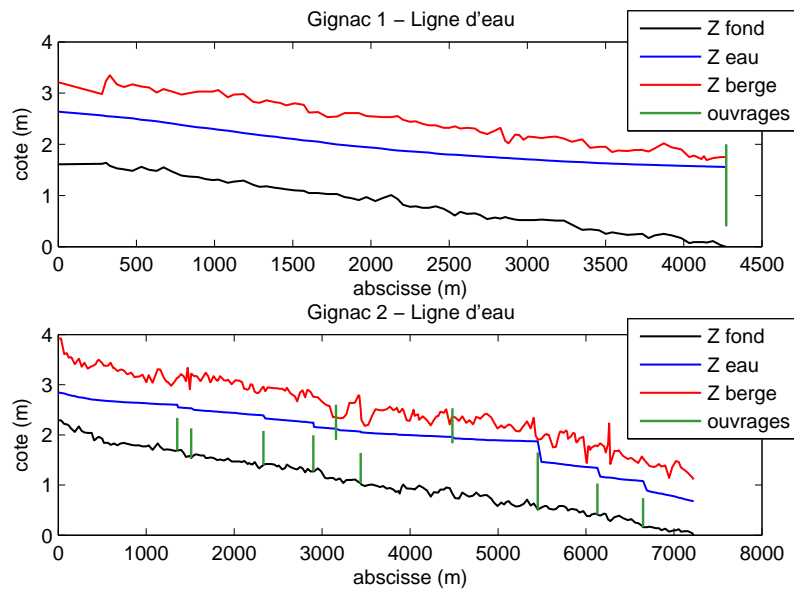


FIGURE 3.8 – Ligne d'eau réelle pour les deux biefs de Gignac (Z représente la cote)

Il est clair que les ouvrages ont une influence forte sur la dynamique, qui se traduit notamment

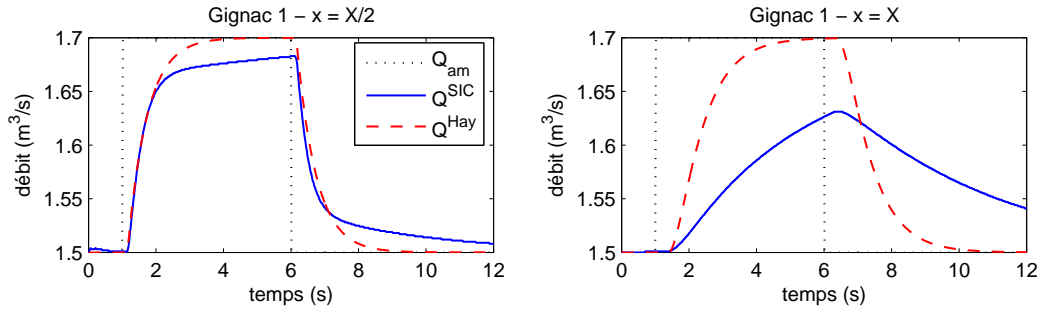


FIGURE 3.9 – Comparaison en $x = X/2$ et $x = X$ des réponses à une entrée créneau par le logiciel SIC pour le bief Gignac 1 avec prise en compte de la vanne aval et par le modèle d'Hayami pour le bief équivalent semi-infini

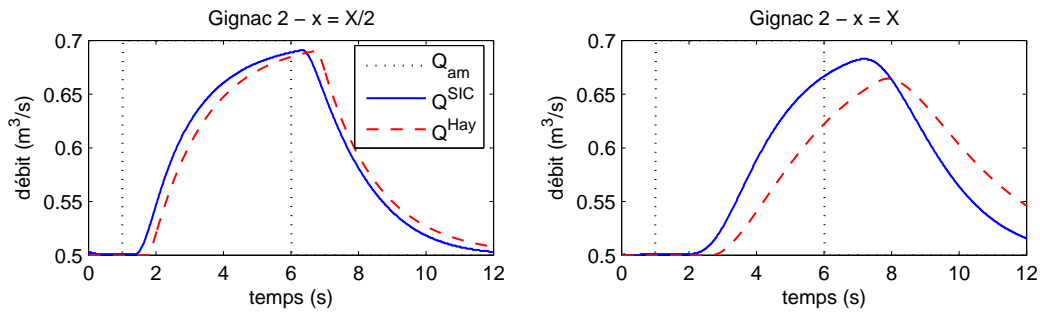


FIGURE 3.10 – Comparaison en $x = X/2$ et $x = X$ des réponses à une entrée créneau par le logiciel SIC pour le bief Gignac 2 avec prise en compte des ouvrages en travers et par le modèle d'Hayami pour le bief équivalent semi-infini

par une forte atténuation dans le cas du bief Gignac 1, et par une atténuation plus faible pour le bief Gignac 2. Il apparaît toutefois que cette influence est moins marquée au milieu du bief qu'à l'aval.

La partie suivante s'intéresse à la synthèse d'un modèle simplifié permettant de prendre en compte les effets de la condition à la limite aval. Nous essaierons alors de répondre à la question suivante : l'introduction d'un ouvrage aval équivalent permet-elle d'améliorer la modélisation ?

3.2.3 Effets d'une condition à la limite aval

Dans le cadre de cette thèse, les biefs considérés sont délimités par des stations hydrométriques, généralement situées à l'amont immédiat d'un ouvrage en travers (seuil, vanne, etc.). Ces ouvrages ont une influence sur la dynamique de l'écoulement à travers le couplage qu'ils induisent entre le débit et la hauteur d'eau. Ce couplage se traduit par l'équation d'ouvrage, et est à l'origine de deux phénomènes. Le premier, que l'on appellera effet *backwater*, vient du fait que la hauteur d'eau au droit de l'ouvrage est liée au débit qui le traverse, provoquant une courbe de remous (figure 3.11). Le second, nommé effet *feedback*, est lié à la variation de hauteur d'eau qu'induit une certaine variation de débit. Cet effet est souvent négligé lors de l'étude de l'influence d'un ouvrage aval ; nous verrons cependant qu'il peut avoir un impact aussi important que l'effet *backwater*. En quelque sorte, l'effet *backwater* correspond à un effet statique puisqu'il

affecte le régime permanent considéré pour la linéarisation, alors que l'effet *feedback* correspond à un effet dynamique puisqu'il peut être assimilé à un contrôleur proportionnel.

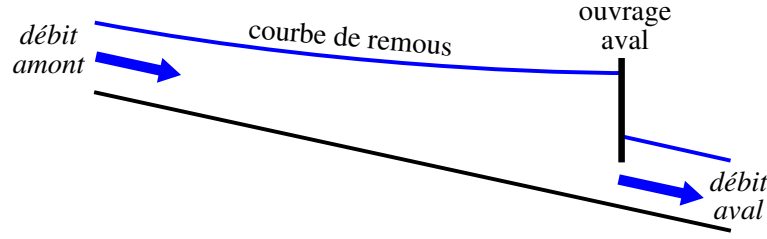


FIGURE 3.11 – Schéma de la courbe de remous induite par un ouvrage aval

La figure 3.12 représente des exemples de courbes $Q = f(Y)$ pour un seuil et une vanne. Pour ces deux ouvrages, la hauteur d'eau est Y_0 pour un débit Q_0 . La courbe de remous, et donc l'effet *backwater*, sont les mêmes dans les deux cas. Cependant, si le débit passe de Q_0 à Q_1 , la variation de hauteur d'eau induite est bien plus importante pour la vanne que pour le seuil. Ainsi, la dynamique ne sera pas affectée de la même manière par la présence d'un seuil ou d'une vanne à l'aval, même si la courbe de remous est identique pour un régime de référence Q_0 . Ce résultat a été mis en évidence par Strelkoff *et al.* (1998), mais n'a jamais été étudié de manière analytique.

La méthode développée ici permet d'étudier l'influence d'un ouvrage aval en prenant en compte les effets *backwater* et *feedback* indépendamment. Pour ce faire, nous supposons que l'aval de l'ouvrage n'a aucune influence sur l'amont (ouvrages dénoyés). Notons que la méthode décrite peut facilement s'étendre au cas des ouvrages influencés par l'aval (cas des ouvrages noyés) en couplant les fonctions de transfert des biefs amont et aval.

L'équation d'ouvrage sera notée :

$$Q = f_{ouvr}(Y) \quad (3.7)$$

Nous utiliserons l'équation (3.8) pour décrire un seuil dénoyé et l'équation (3.9) pour une vanne

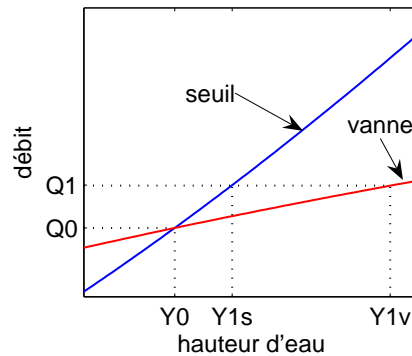


FIGURE 3.12 – Les deux effets de la présence d'un ouvrage aval.

de fond dénoyée :

$$Q = \sqrt{2g}C_s L_s (Y - Z_s)^{3/2} \quad (3.8)$$

$$Q = \sqrt{2g}C_v L_v W_v \sqrt{Y} \quad (3.9)$$

où L_s est la longueur du seuil, Z_s la hauteur de pelle, C_s le coefficient de débit du seuil, L_v la largeur de la vanne, W_v l'ouverture de la vanne et C_v le coefficient de débit de la vanne.

Développement d'un modèle fréquentiel

Nous cherchons ici à établir une fonction de transfert simple reliant les variations de débit en tout point du cours d'eau aux variations du débit amont. Les équations de Saint-Venant sont d'abord linéarisées autour d'un régime de référence, puis transposées dans le domaine fréquentiel. L'introduction de l'équation d'ouvrage linéarisée permet ensuite d'établir la fonction de transfert avec couplage aval pour un régime de référence uniforme. Enfin, pour prendre en compte la courbe de remous, le bief sera scindé en deux sous-biefs, le premier représentant la partie uniforme, le deuxième la partie non uniforme. Le modèle ainsi obtenu, nommé LBLR pour *Linear Backwater LagRoute*, est présenté dans l'article de Munier *et al.* (2008).

1. Equations de Saint-Venant linéarisées

Dans la suite, les variables décrivant le régime de référence, défini par un débit uniforme sur tout le bief (donc sans débit latéral), seront notées avec l'indice 0 (par exemple Q_0 , $Y_0(x)$, etc.), les variables notées en minuscule ($q(x, t)$, $y(x, t)$, etc.) correspondront à des petites variations autour du régime de référence. Avec ces notations, les équations de Saint-Venant linéarisées s'écrivent :

$$T_0(x) \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = q_l \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + 2V_0(x) \frac{\partial q}{\partial x} - \mu_0(x)q + T_0(x) (C_0(x)^2 - V_0(x)^2) \frac{\partial y}{\partial x} - \nu_0(x)y = 0 \quad (3.11)$$

où :

$$\mu_0 = -\frac{2g}{V_0} \left(S_b - \frac{dY_0}{dx} \right) \quad (3.12)$$

$$\nu_0 = V_0^2 \frac{dY_0}{dx} + gT_0 \left[(1 + \kappa_0)S_b - (1 + \kappa_0 - (\kappa_0 - 2)F_0^2) \frac{dY_0}{dx} \right] \quad (3.13)$$

avec $\kappa_0 = 7/3 - 4A_0/(3T_0P_0)(\partial P/\partial Y)_0$ un paramètre adimensionnel relatif à la forme de la section d'écoulement. Dans les équations (3.12-3.13), la dépendance en x a été omise pour plus de lisibilité.

Dans cette partie, on s'intéresse au transfert d'un débit amont ; le débit latéral q_l est donc supposé nul. Le transfert d'un débit latéral sera étudié dans la partie 3.3.

2. Approche fréquentielle

Les équations de Saint-Venant linéarisées sont ensuite transposées dans le domaine fréquentiel par la transformée de Laplace. Afin d'alléger les écritures, les variables $q(x, t)$ et $y(x, t)$ garderont la même notation dans le domaine fréquentiel, soit $q(x, s)$ et $y(x, s)$, où s est la variable de Laplace. Le système peut alors s'écrire sous la forme :

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} q(x, s) \\ y(x, s) \end{pmatrix} = \mathcal{A}_s(x) \begin{pmatrix} q(x, s) \\ y(x, s) \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

avec :

$$\mathcal{A}_s(x) = \begin{pmatrix} 0 & -T_0 s \\ -\frac{s-\mu_0}{T_0(C_0^2-V_0^2)} & \frac{2V_0 T_0 s + \nu_0}{T_0(C_0^2-V_0^2)} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Pour résoudre analytiquement l'équation différentielle ordinaire (3.14), la matrice \mathcal{A}_s est diagonalisée. Les valeurs propres sont :

$$\begin{cases} \lambda_1(s) &= a + bs - \sqrt{a^2 + cs + ds^2} \\ \lambda_2(s) &= a + bs + \sqrt{a^2 + cs + ds^2} \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\text{où } a = \frac{\nu_0}{2T_0(C_0^2-V_0^2)}, b = \frac{V_0}{C_0^2-V_0^2}, c = \frac{V_0\nu_0-(C_0^2-V_0^2)T_0\mu_0}{T_0(C_0^2-V_0^2)^2}, d = \frac{C_0^2}{(C_0^2-V_0^2)^2}.$$

Dans la suite, la dépendance en s de λ_1 et λ_2 sera omise pour plus de lisibilité.

La matrice \mathcal{A}_s s'écrit alors :

$$\mathcal{A}_s = P_s D_s P_s^{-1} \quad (3.17)$$

avec :

$$D_s = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, P_s = \frac{1}{T_0 s} \begin{pmatrix} T_0 s & T_0 s \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 \end{pmatrix}, P_s^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} -\lambda_2 & -T_0 s \\ \lambda_1 & T_0 s \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

En supposant que \mathcal{A}_s est uniforme le long du bief, l'équation (3.14) peut être résolue analytiquement et conduit à (Litrico et Fromion, 2004a) :

$$\begin{pmatrix} q(x, s) \\ y(x, s) \end{pmatrix} = \Gamma(x, s) \begin{pmatrix} q_0(s) \\ y_0(s) \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

avec $q_0(s) = q(0, s)$, $y_0(s) = y(0, s)$ et :

$$\Gamma(x, s) = P_s e^{D_s x} P_s^{-1} \quad (3.20)$$

La matrice Γ permet d'obtenir le débit et la hauteur d'eau en tout point du bief avec comme conditions aux limites le débit et la hauteur d'eau à l'amont. Comme nous allons le voir, l'introduction de l'équation d'un ouvrage situé à l'aval du bief permet de réduire les conditions aux limites au seul débit amont, et ainsi d'établir la fonction de transfert TF_0 reliant $q(x, s)$ à $q_0(s)$:

$$q(x, s) = TF_0(x, s)q_0(s) \quad (3.21)$$

3. Fonction de transfert avec feedback pour un écoulement uniforme

La linéarisation de l'équation d'ouvrage (3.7) permet d'introduire le coefficient de *feedback* $k = f'_{ouvr}(Y_X)$. Ce coefficient caractérise l'effet *feedback* à travers la relation :

$$q(X, t) = ky(X, t) \quad (3.22)$$

Dans le cas du seuil, $k = \frac{3}{2} \frac{Q_0}{Y_X - Z_s}$. Pour la vanne, $k = \frac{1}{2} \frac{Q_0}{Y_X}$.

Ainsi l'équation (3.19) couplée à l'équation (3.22) permettent d'écrire la fonction de transfert TF_0 sous la forme :

$$TF_0(x, s) = \frac{1 - \rho e^{(\lambda_1 - \lambda_2)(X-x)}}{1 - \rho e^{(\lambda_1 - \lambda_2)X}} e^{\lambda_1 x} \quad (3.23)$$

où :

$$\rho = \frac{k\lambda_1 + T_0 s}{k\lambda_2 + T_0 s} \quad (3.24)$$

4. Approximation de la courbe de remous

L'effet *backwater* est pris en compte grâce à une approximation de la courbe de remous développée initialement par Schuurmans *et al.* (1999) et modifiée par Litrico et Fromion (2004b). Elle consiste en un découpage du bief en deux sous-biefs, le premier relatif à la partie uniforme de la ligne d'eau, le second relatif à la partie non uniforme. La ligne d'eau réelle, caractérisée par l'équation (3.25), est alors approchée par deux segments de droite, comme illustré sur la figure 3.13.

$$\frac{dY}{dx} = \frac{S_b - S_f}{1 - F^2} \quad (3.25)$$

où $F = V/C$ est le nombre de Froude.

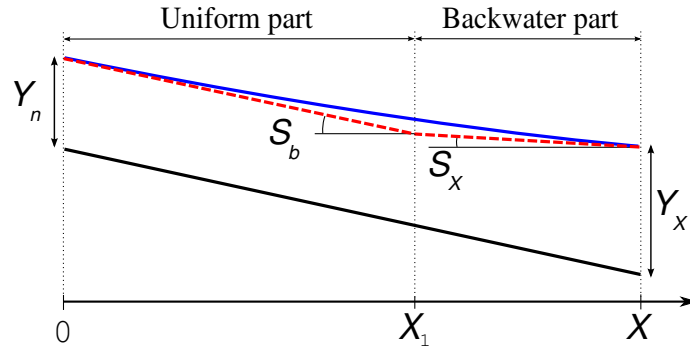


FIGURE 3.13 – Approximation de la courbe de remous

Dans la partie non uniforme, la ligne d'eau approchée est tangente à la ligne d'eau réelle en $x = X$. L'abscisse de séparation des deux sous-biefs, X_1 , est alors déterminée par l'intersection de la ligne d'eau approchée de la partie *backwater* avec la ligne d'eau du régime normal. Les variables décrivant l'écoulement de référence seront notées avec les indices 1 et 2 pour les sous-biefs amont et aval respectivement. Le régime de linéarisation dans la partie amont correspond au régime normal avec le débit Q_0 . Dans la partie aval,

de longueur $X_2 = X - X_1$, le régime de linéarisation est défini par un débit Q_0 , une pente de la ligne d'eau S_X et une hauteur d'eau moyenne $Y_2 = Y_X - S_X X_2/2$.

Dans chaque sous-bief, les caractéristiques de l'écoulement sont supposées uniformes. Il est alors possible d'écrire les fonctions de transfert TF_1 et TF_2 relatives à chaque sous-bief sous la même forme que dans l'équation (3.23), soit, pour $i = 1..2$:

$$TF_i(x_i, s) = \frac{1 - \rho_i e^{(\lambda_{1i} - \lambda_{2i})(X_i - x_i)}}{1 - \rho_i e^{(\lambda_{1i} - \lambda_{2i})X_i}} e^{\lambda_{1i} x_i} \quad (3.26)$$

avec λ_{1i} et λ_{2i} les valeurs propres du sous-bief i et x_i l'abscisse dans le sous-bief i ($x_1 = x$ et $x_2 = x - X_1$). Les variables ρ_i sont définies par :

$$\rho_i = \frac{k_i \lambda_{1i} + T_i s}{k_i \lambda_{2i} + T_i s} \quad (3.27)$$

où

$$k_1 = -T_2 s \frac{1 - \rho_2 e^{(\lambda_{12} - \lambda_{22})X_2}}{\lambda_{12} - \lambda_{22} \rho_2 e^{(\lambda_{12} - \lambda_{22})X_2}} \quad \text{et} \quad k_2 = k \quad (3.28)$$

k_1 est obtenu en couplant les équations (3.19) (dans le sous-bief 2) et (3.22).

La fonction de transfert TF_0 découle du couplage entre les fonctions de transfert TF_1 et TF_2 . Elle est donnée par :

$$TF_0(x, s) = \begin{cases} TF_1(x, s) & \text{si } x \leq X_1 \\ TF_1(X_1, s) TF_2(x - X_1, s) & \text{si } x > X_1 \end{cases} \quad (3.29)$$

Approximation basse fréquence (méthode des moments)

Pour permettre un retour dans le domaine temporel sans passer par l'utilisation du produit de convolution, la fonction de transfert TF_0 , que l'on appellera « exacte », devra être approchée par une fonction de transfert plus simple. La méthode utilisée a été développée par Lal et Mitra (1974) et adaptée par Dooge *et al.* (1987) pour le transfert d'un débit amont. Il s'agit de la méthode dite « des moments » (*Moment Matching Method*) dont le principe est d'égaliser les moments d'ordre 0, 1, 2, etc. de la fonction de transfert exacte avec ceux d'une fonction de transfert approchée dont la forme est déterminée *a priori*. Cette méthode permet d'obtenir analytiquement les paramètres de la fonction de transfert approchée de façon à reproduire le mieux possible le comportement basse fréquence de la dynamique du bief.

La figure 3.14 présente le diagramme de Bode² de la fonction de transfert exacte pour les quatre canaux types, dans le cas uniforme. La forme de ces courbes permet de choisir pour les fonctions de transfert approchées une représentation du type « premier ordre avec retard » en première approximation (graphe de droite).

Afin de représenter plus finement la dynamique du bief, il est possible de choisir des fonctions de transfert plus complexes (ajout d'un zéro, deuxième ordre ou plus généralement

2. Le diagramme de Bode de la fonction de transfert $TF(j\omega)$ est composé des tracés du module en décibels ($20 \log_{10} |TF(j\omega)|$) et de la phase en degrés ($\arg TF(j\omega)$) en fonction de la fréquence angulaire ω en rad/s

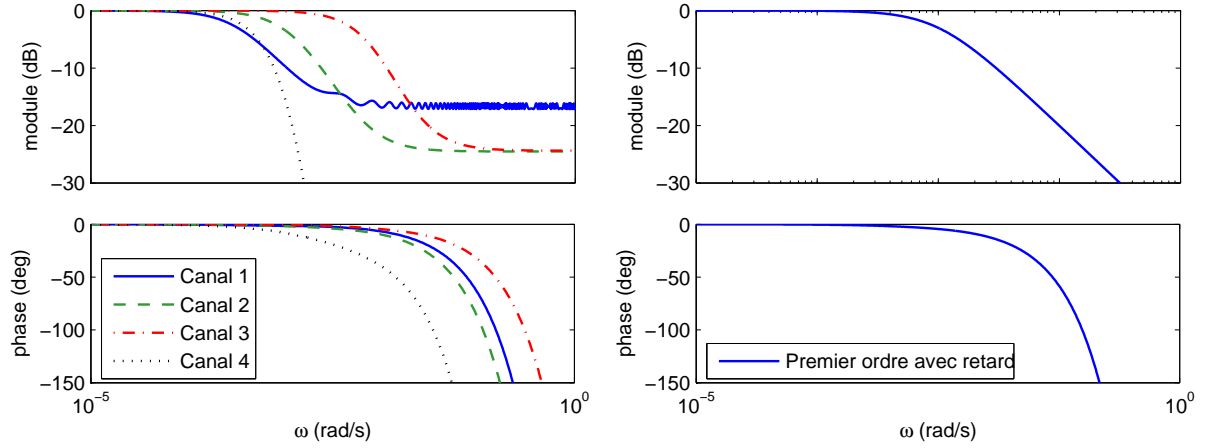


FIGURE 3.14 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert exacte pour les quatre canaux types (à gauche) et diagramme de Bode pour une fonction de transfert de type premier ordre avec retard (à droite)

fraction rationnelle). Cependant, même si la méthodologie développée reste applicable, nous avons choisi d'en rester à une fonction de type premier ordre plus retard pour deux raisons. La première est d'éviter les problèmes de stabilité que l'on peut rencontrer avec des ordres plus élevés (Malaterre, 1994), la seconde est de limiter le nombre de paramètres qui devront être calés lors de l'étape d'identification. En outre ce type de fonction permet de reproduire deux caractéristiques essentielles du transfert de surface : l'atténuation et le retard.

Rappelons la définition du moment logarithmique d'ordre R de la fonction $h(t)$ (ou $h(s)$ dans le domaine de Laplace) :

$$M_R[h(t)] = (-1)^R \frac{d^R}{ds^R} [\log h(s)]_{s=0} \quad (3.30)$$

La méthode des moments revient donc à égaliser les dérivées successives des fonctions de transfert exactes et approchées en $s = 0$. Le calcul de ces dérivées se fera par l'approximation de Taylor en 0, soit pour la fonction de transfert exacte :

$$TF_0(x, s) = A_0(x) + B_0(x)s + C_0(x)s^2 + o(s^2) \quad (3.31)$$

La fonction de transfert TF_0 étant calculée à partir des caractéristiques du bief et du régime de linéarisation, il en va de même pour les fonctions A_0 , B_0 et C_0 .

Cette fonction de transfert est approchée par la fonction de transfert suivante, du type premier ordre plus retard :

$$\widetilde{TF}_0(x, s) = G_0(x) \frac{e^{-\tau_0(x)s}}{1 + K_0(x)s} \quad (3.32)$$

La méthode des moments conduit alors aux équations :

$$\begin{aligned} G_0(x) &= A_0(x) \\ \tau_0(x) &= -B_0(x) - \sqrt{2C_0(x)} \\ K_0(x) &= \sqrt{2C_0(x)} \end{aligned} \quad (3.33)$$

L'annexe 3.5 détaille le calcul de l'approximation de Taylor de TF_0 qui permet d'établir l'expression de A_0 , B_0 et C_0 définis par l'équation (3.31). Notons que ce calcul conduit à $A_0(x) = 1$, ce qui est en accord avec l'équation de conservation de la masse. Il en résulte que $G_0(x) = 1$. La fonction de transfert simplifiée du débit amont est donc caractérisée par $\tau_0(x)$ et $K_0(x)$, calculés analytiquement à partir des caractéristiques du bief X , B , m , S_b et n , de Q_0 décrivant le régime de linéarisation, et de Y_X et k décrivant respectivement la courbe de remous et le *feedback*.

En résumé : le modèle LBLR (*Linear Backwater Lag&Route*)

- Modèle fréquentiel simplifié à base physique
- Prise en compte des effets de la condition à la limite aval
- Fonction de transfert distribuée du type premier ordre avec retard : $\widetilde{TF}_0(x, s) = \frac{e^{-\tau_0(x)s}}{1 + K_0(x)s}$
- Paramètres $\tau_0(x)$ et $K_0(x)$ déterminés analytiquement à partir des caractéristiques physiques

Analyse des effets *backwater* et *feedback*

Effet d'un seuil, effet d'une vanne

Pour illustrer l'impact que peut avoir la condition à la limite aval sur la dynamique, deux types d'ouvrages sont introduits successivement à l'aval du canal type C2. Le premier est un seuil de longueur 30 m, de hauteur de pelle 2.6 m et de coefficient de débit 0.4. Ce seuil induit une hauteur aval $Y_X = 1.25Y_n$ et un coefficient de *feedback* $k = 1.89k_n$, où k_n est le coefficient de *feedback* obtenu lorsque l'équation d'ouvrage est l'équation de Manning (3.3). Le second ouvrage est une vanne de largeur de 10 m, d'ouverture 1.52 m et de coefficient de débit 0.6, ce qui donne $Y_X = 1.25Y_n$ et $k = 0.21k_n$. Le seuil et la vanne provoquent donc la même courbe de remous, et ont donc le même effet *backwater*. Les résultats temporels ainsi que l'approximation de la courbe de remous sont illustrés sur la figure 3.15. La réponse par le modèle d'Hayami y est également présentée pour comparaison avec le cas semi-infini. La figure 3.16 présente le diagramme de Bode des fonctions de transfert exactes et approchées par les modèles LBLR et Hayami.

Il est clair d'après ces graphes que, d'une part, la condition à la limite aval peut avoir une influence significative sur la dynamique de l'écoulement, d'autre part, la nature de l'ouvrage aval a également une importance du point de vue dynamique. En effet, la présence d'un seuil à l'aval a tendance, dans cet exemple, à accélérer l'écoulement, alors que la vanne le ralentit. En outre, le modèle LBLR est capable, dans ces deux cas, de prendre en compte de manière très satisfaisante la condition à la limite aval.

De même, la figure 3.17 montre les résultats du modèle LBLR comparés à ceux de SIC en incluant

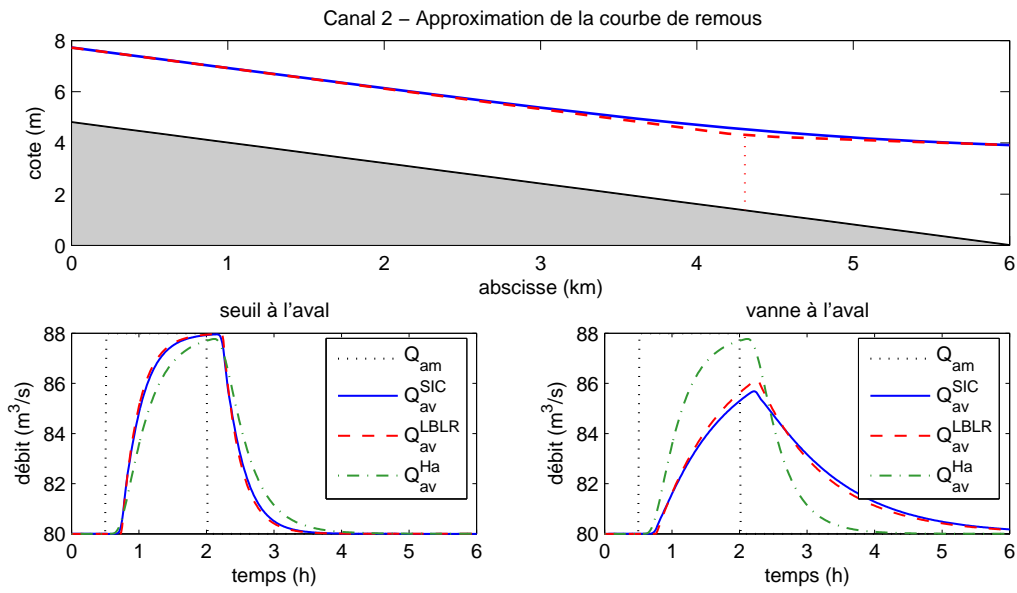


FIGURE 3.15 – Comparaison des modèles LBLR, Hayami et SIC pour le canal C2 avec un seuil à l'aval (à gauche) ou une vanne (à droite)

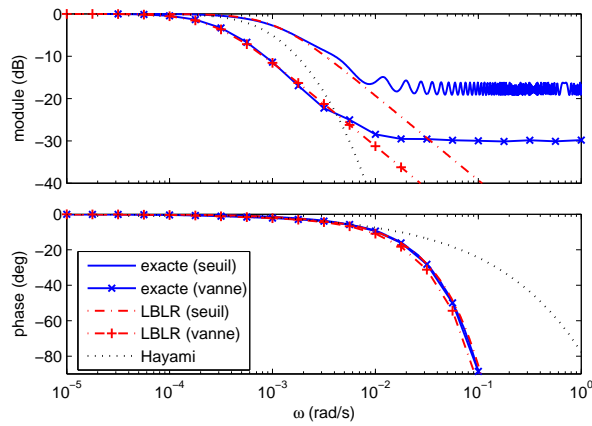


FIGURE 3.16 – Diagramme de Bode des fonctions de transfert exactes et approchées (par LBLR et Hayami) pour le canal C2 avec un seuil à l'aval ou une vanne

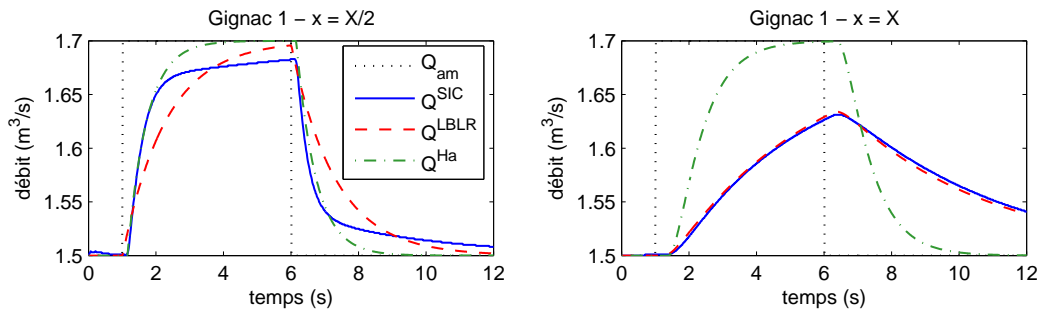


FIGURE 3.17 – Comparaison des réponses en $x = X/2$ et $x = X$ par le logiciel SIC et les modèles LBLR et Hayami à une entrée créneau pour le bief Gignac 1 avec vanne aval

la vanne à l'aval du bief Gignac 1. Les résultats du modèle d'Hayami sont également représentés. La vanne est définie par une largeur de 3.58 m, une ouverture de 0.4 m et un coefficient de débit de 0.6. Le modèle LBLR permet de reproduire avec une très bonne précision le débit à l'aval, ainsi qu'au point intermédiaire où la vanne a moins d'influence. La qualité des résultats au point intermédiaire est moins bonne du fait de la présence de hautes fréquences (visibles par la montée rapide et la cassure qui suit) non prises en compte dans le modèle LBLR. Il serait possible d'identifier par la méthode des moments une fonction de transfert de type premier ordre plus zéro avec retard, qui permettrait une première approximation des hautes fréquences et donnerait de meilleurs résultats :

$$\widetilde{TF}_0(x, s) = \frac{1 + Z_0(x)s}{1 + K_0(x)s} e^{-\tau_0(x)s} \quad (3.34)$$

Cette nouvelle fonction de transfert n'est pas présentée ici, car la grande majorité des cas traités par la suite concernant des biefs de rivière plutôt longs pour lesquels les hautes fréquences sont fortement atténuées.

Ce résultat montre que la méthode simple de recherche d'une géométrie équivalente et la prise en compte de l'ouvrage réel dans le modèle LBLR permettent de reproduire de manière satisfaisante le débit dans le bief.

Recherche d'un ouvrage équivalent

Nous avons déjà mentionné que le bief Gignac 2 possède de nombreux ouvrages répartis le long du bief. Une première façon de prendre ces ouvrages en compte serait de découper le bief en sous-biefs séparés par les ouvrages, et d'appliquer le modèle LBLR sur chacun des sous-biefs. Cette méthode n'est pas présentée car elle introduit une erreur multiplicative qui dégrade la reconstitution du débit à l'aval. Une autre méthode, que l'on appellera méthode des volumes, serait de chercher un ouvrage équivalent permettant de reproduire les effets de tous les ouvrages réels. Pour ce faire, nous avons calculé grâce au logiciel SIC le volume total \mathcal{V} dans le bief pour différents régimes permanents Q . En conservant la géométrie équivalente établie au début de cette partie (voir tableau 3.2), un seuil équivalent a été déterminé de manière à minimiser l'écart entre la courbe $\mathcal{V}(Q)$ calculée par SIC et celle obtenue par l'approximation de la courbe de remous. On obtient un seuil de longueur 3.23 m et de hauteur 1.37 m (le coefficient de débit a été fixé à 0.4). La figure 3.18 montre la courbe obtenue, ainsi que celle correspondant au bief semi-infini (uniforme).

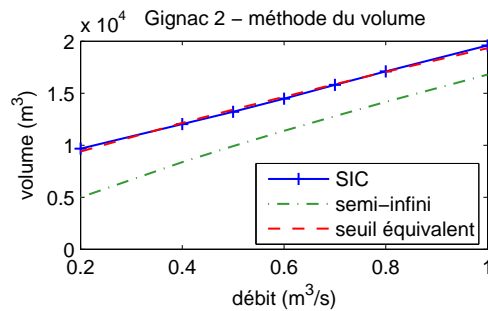


FIGURE 3.18 – Volume équivalent pour le bief Gignac 2

La réponse en $x = X/2$ et en $x = X$ à une entrée créneau est présentée sur la figure 3.19. Les modèles SIC, LBLR et Hayami produisent quasiment les mêmes résultats au point intermédiaire où l'influence des ouvrages est peu marquée. Par contre à l'aval, le modèle LBLR est bien meilleur que le modèle d'Hayami. Ces résultats montrent qu'il est possible, par la méthode des volumes, de trouver un ouvrage équivalent du point de vue de la dynamique permettant de reproduire les effets des multiples ouvrages répartis le long du bief.

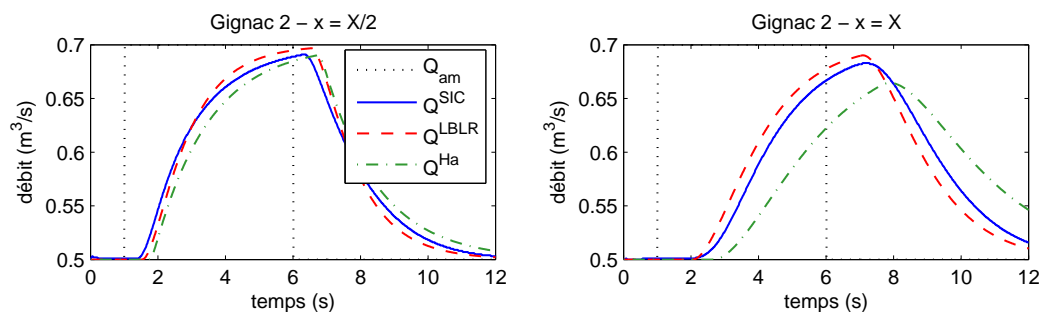


FIGURE 3.19 – Comparaison des réponses en $x = X/2$ et $x = X$ par le logiciel SIC et le modèle LBLR à une entrée créneau pour le bief Gignac 2 avec l'ouvrage équivalent

Discussion

La prise en compte de la condition à la limite aval dans le transfert de débit a été rendue possible grâce à l'approche physique développée. Le modèle LBLR obtenu présente plusieurs avantages :

- Dans le cas où le bief ne présente qu'un ouvrage à l'aval, le modèle LBLR permet d'améliorer significativement la reconstitution du débit dans le bief en utilisant directement les caractéristiques de l'ouvrage. Dans le cas de plusieurs ouvrages répartis le long du bief, la méthode des volumes permet d'établir un ouvrage équivalent capable de reproduire les effets de tous les ouvrages.
- Le modèle LBLR offre la possibilité d'analyser indépendamment les effets *backwater* et *feedback* induits par un ouvrage donné, ce qui peut être utile lors de la phase de conception d'un canal.
- Le caractère physique du modèle permet une pré-détermination des paramètres à partir des caractéristiques physiques du bief, réduisant ainsi les problèmes d'identifiabilité lors de l'étape d'identification du modèle intégré.

Cependant, la méthode soulève quelques interrogations :

- Elle nécessite une connaissance relativement précise de la géométrie du bief et des caractéristiques des ouvrages pour la détermination d'un bief et d'un ouvrage équivalents. Dans de nombreux cas, ces données ne sont pas disponibles et nécessitent des campagnes de mesure coûteuses. A partir de quelles données peut-on établir une géométrie équivalente ?
- Les résultats précédents ont été obtenus pour des géométries uniformes ou quasi-uniformes. Comment déterminer la géométrie équivalente dans le cas non uniforme, comme pour la plupart des rivières ?

En résumé, la prise en compte de la condition à la limite aval présente un fort intérêt lorsqu'il est possible d'établir une géométrie équivalente et que les caractéristiques des ouvrages sont connues, ce qui est le cas de la plupart des canaux dont la géométrie est relativement uniforme. Dans ce cas, le nombre de paramètres à identifier lors de la procédure de calage s'en trouvera réduit, puisque les paramètres du modèle de transfert pourront être pré-déterminés. La procédure de calage ne portera donc que sur les paramètres des modèles relatifs aux transferts latéraux, réduisant ainsi les problèmes d'identifiabilité.

En revanche, lorsqu'il devient difficile de trouver une géométrie équivalente, en général par manque de données topographiques, les paramètres du modèle de transfert devront être calés à partir des mesures de débit amont et aval. A moins de pouvoir isoler des événements sans transferts latéraux, le calage du modèle de transfert débit-débit devra se faire en même temps que celui des modèles des transferts latéraux. Dans ce cas, il vaut mieux caler les paramètres $\tau_0(X)$ et $K_0(X)$ plutôt que les caractéristiques physiques plus nombreuses, ceci pour plusieurs raisons :

- Plusieurs géométries peuvent correspondre à des mêmes valeurs de $\tau_0(X)$ et $K_0(X)$, ce qui peut engendrer des problèmes d'identifiabilité.
- Lorsque l'on modélise l'influence de plusieurs ouvrages par un seul ouvrage équivalent, on reporte tous les effets des ouvrages sur la partie aval du bief. Ainsi, la qualité du modèle n'est plus garantie lorsque l'on souhaite reconstituer les débits à l'intérieur du bief, ou lorsque l'on intègre les débits latéraux répartis en différents points du bief.
- Sur des biefs longs contenant peu d'ouvrages, les effets de ces ouvrages sur la dynamique peuvent être limités, voire négligeables devant d'autres phénomènes comme lors des épisodes de crue où les ouvrages sont « effacés ».

En conclusion, nous avons fait le choix, pour la suite de nos travaux, de négliger la condition à la limite aval en considérant le bief comme semi-infini. Cette hypothèse présente l'avantage d'un nombre minimum de paramètres caractéristiques décrivant la dynamique de l'écoulement. Nous verrons par la suite que ces paramètres, au nombre de trois voire deux, suffisent à décrire le transfert d'un débit amont ainsi que le transfert des débits latéraux. Par contre, même si ces paramètres conservent une signification physique, il sera en général nécessaire de les caler lors de l'étape d'identification. Le caractère physique de ces paramètres permet toutefois de leur assigner une valeur initiale estimée pour démarrer l'identification, et offre également des possibilités d'interprétation.

3.2.4 Un modèle de transfert à 2 paramètres

L'hypothèse d'un bief semi-infini se traduit par une condition à la limite aval repoussée à l'infini. Cette hypothèse est souvent utilisée dans la modélisation du transfert de débit dans un cours d'eau (notamment pour le modèle d'Hayami largement utilisé en contexte opérationnel) car elle permet de simplifier les équations de manière significative. Une première traduction de cette hypothèse est de dire que l'on néglige les ondes ascendantes. En effet, une perturbation du débit amont se propage le long du bief et se réfléchit à l'aval. Du fait de l'atténuation lors de la

propagation, l'onde ascendante sera nulle si la longueur du bief est infinie. Pour la propagation d'un débit amont, considérer un bief semi-infini revient donc à négliger les ondes ascendantes (correspondant à la valeur propre λ_2 de l'équation (3.16)). Par contre, il n'en va pas de même pour un débit latéral dont la perturbation se réfléchit également à l'amont. Ce point sera étudié dans la partie 3.3 relative au transfert d'un débit latéral.

Si nous reprenons l'expression de la fonction de transfert TF_0 (équation (3.23)) correspondant au régime uniforme avec prise en compte du *feedback*, considérer le bief comme semi-infini revient à considérer que $x \ll X$. Le régime de linéarisation correspond dans ce cas au régime normal caractérisé par $Y_0 = Y_n$. La fonction de transfert devient :

$$TF_0(x, s) = e^{\lambda_1 x} \quad (3.35)$$

Cette expression correspond à celle que l'on aurait obtenue en négligeant les ondes ascendantes. Elle correspond également à la fonction de transfert d'Hayami pour laquelle λ_1 est obtenu à partir de l'équation de l'onde diffusante, simplification des équations de Saint-Venant.

Nombres caractéristiques adimensionnels

Il est intéressant à ce stade, d'introduire une nouvelle variable adimensionnelle $\chi_0 = S_b X T_0 / A_0$, car alors la fonction de transfert peut s'écrire uniquement en fonction des trois variables caractéristiques adimensionnelles F_0 , χ_0 et κ_0 décrivant le régime normal, de l'abscisse adimensionnelle $x^* = x/X$ et d'un temps de référence $t_R = A_0 X / Q_0$ fixé *a priori*. En effet, si l'on pose $s^* = t_R s$, on trouve :

$$\lambda_i^* = \lambda_i X = a^* + b^* s^* + (-1)^i \sqrt{a^{*2} + c^* s^* + d^* s^{*2}} \quad (i = 1..2) \quad (3.36)$$

avec $a^* = \frac{1+\kappa_0}{2} \frac{\chi_0}{1-F_0^2}$, $b^* = \frac{F_0^2}{1-F_0^2}$, $c^* = \frac{\chi_0}{1-F_0^2} \left[(1+\kappa_0) \frac{F_0^2}{1-F_0^2} + 2 \right]$, $d^* = \frac{F_0^2}{(1-F_0^2)^2}$.

Cette démarche permet de réduire le nombre de paramètres décrivant la dynamique de l'écoulement autour du régime de linéarisation de six (Q_0 , X , B , m , S_b et n) à quatre (F_0 , χ_0 , κ_0 et t_R).

Le développement de Taylor de $\lambda_1 x$ s'écrit alors :

$$\lambda_1 x = \lambda_1^* x^* = -\frac{2}{1+\kappa_0} x^* s^* + \frac{f(F_0, \kappa_0)}{\chi_0} x^* s^{*2} + o(s^{*2}) \quad (3.37)$$

avec

$$f(F_0, \kappa_0) = \frac{1}{(1+\kappa_0)(1-F_0^2)} \left[\left(2 \frac{1-F_0^2}{1+\kappa_0} + F_0^2 \right)^2 - F_0^2 \right] \quad (3.38)$$

Les caractéristiques adimensionnelles et le temps de référence des canaux types et du bief équivalent de Gignac sont donnés dans le tableau 3.3.

Bief	F_0	χ_0	κ_0	t_R (h)
C1	0.16	0.19	1.80	1.38
C2	0.48	2.22	1.77	0.83
C3	0.81	5.70	1.71	0.23
C4	0.23	10.56	2.18	3.78
Gignac 1	0.23	2.39	1.84	1.90
Gignac 2	0.16	4.03	1.69	5.50

TABLEAU 3.3 – Caractéristiques adimensionnelles et temps de référence des canaux types et du bief de Gignac

Réduction à 2 paramètres

L'application de la méthode des moments (avec les moments logarithmiques) permet d'aboutir à l'expression analytique de K_0 et τ_0 :

$$\begin{cases} K_0(x) &= t_R \sqrt{2x^* \frac{f(F_0, \kappa_0)}{\chi_0}} \\ \tau_0(x) &= t_R \left(\frac{2x^*}{1+\kappa_0} - \sqrt{2x^* \frac{f(F_0, \kappa_0)}{\chi_0}} \right) \end{cases} \quad (3.39)$$

Le transfert est ainsi déterminé par les seuls paramètres F_0 , χ_0 , κ_0 et t_R . Toutefois le paramètre t_R est un paramètre choisi à l'avance et n'est pas à caler lors de l'étape d'identification.

En outre, il est à noter que $\tau_0(x)$ et $K_0(x)$ peuvent être obtenus uniquement à partir de $\tau_0(X)$ et $K_0(X)$ par les équations suivantes :

$$\begin{cases} K_0(x) &= \sqrt{x^*} K_0(X) \\ \tau_0(x) &= x^* (\tau_0(X) + K_0(X)) - \sqrt{x^*} K_0(X) \end{cases} \quad (3.40)$$

En conclusion, le transfert en tout point du bief est entièrement déterminé par les paramètres $\tau_0(X)$ et $K_0(X)$, qui seront donc les deux paramètres à caler lors de la phase d'identification. Le modèle obtenu sera appelé LLR pour *Linear LagRoute*.

En résumé : le modèle LLR (*Linear LagRoute*)

- Modèle fréquentiel simplifié à base physique
- Hypothèse d'un bief semi-infini
- Dynamique de l'écoulement entièrement caractérisée par trois nombres adimensionnels (F_0, χ_0, κ_0) et un temps de référence (t_R)
- Fonction de transfert distribuée du type premier ordre avec retard : $\widetilde{TF}_0(x, s) = \frac{e^{-\tau_0(x)s}}{1+K_0(x)s}$
- Paramètres $\tau_0(x)$ et $K_0(x)$ déterminés analytiquement à partir de $(F_0, \chi_0, \kappa_0, t_R)$, voire de $(\tau_0(X), K_0(X))$ uniquement

3.2.5 Non uniformité du bief équivalent

La fonction de transfert d'un débit amont a été calculée sous l'hypothèse d'un bief de caractéristiques uniformes, et pour un régime de référence uniforme. Cette fonction de transfert est établie à partir de trois paramètres adimensionnels (F_0 , χ_0 et κ_0) et d'un temps de référence t_R fixé *a priori*. Nous avons également discuté de la notion de bief équivalent du point de vue de la dynamique de l'écoulement. Lorsque certaines caractéristiques du bief ou du régime de référence varient significativement le long du bief, il se peut qu'un bief équivalent uniforme ne puisse pas représenter correctement la dynamique. Si cette dynamique ne concerne que le transfert d'un débit amont observé à l'aval, la procédure d'identification permettra de choisir les paramètres $\tau_0(X)$ et $K_0(X)$ qui produisent les meilleurs résultats. Dans ce cas, la non uniformité du bief réel sera indirectement prise en compte par ce choix. Cependant, dès lors que l'on souhaite intégrer des débits latéraux à différentes positions dans le bief, ou que l'on souhaite observer le débit ailleurs qu'à l'aval, le bief équivalent correspondant aux paramètres $\tau_0(X)$ et $K_0(X)$ ne garantit pas une bonne représentation du transfert.

Nous proposons ici une méthode simple permettant de prendre en compte des non uniformités des caractéristiques du bief et du régime de référence. Cette méthode repose sur un découpage du bief en sous-biefs uniformes, découpage caractérisé par des variations significatives de certaines caractéristiques. On peut considérer par exemple le cas d'une rupture de pente, ou celui d'un changement de débit de linéarisation dû à un apport ponctuel important (par exemple un affluent). Cette démarche est rendue possible grâce à l'approche adimensionnelle présentée précédemment, et à une hypothèse supplémentaire qui suppose un bief équivalent rectangulaire large.

Nous allons tout d'abord introduire des coefficients de non uniformité traduisant le changement des caractéristiques. Puis nous étudierons l'impact de ce changement sur les paramètres F_0 , χ_0 , κ_0 et t_R . La prise en compte des coefficients de non uniformité dans le transfert de débit sera étudiée ensuite. Enfin, la méthode sera validée sur un cas théorique.

Coefficients de non uniformité

Dans le cas d'un bief rectangulaire large, l'écoulement est caractérisé par cinq paramètres : le débit de linéarisation Q , la longueur X , la largeur B , la pente du fond S_b et le coefficient de Manning n . Supposons que ces paramètres soient obtenus à partir de paramètres de référence Q_0 , X_0 , B_0 , S_{b0} et n_0 . Pour chaque paramètre, nous introduisons un coefficient décrivant sa relation avec le paramètre de référence, déterminé par les relations suivantes :

$$Q = C_Q Q_0, \quad X = C_X X_0, \quad B = C_B B_0, \quad S_b = C_{S_b} S_{b0}, \quad n = C_n n_0 \quad (3.41)$$

Ces coefficients seront nommés « coefficients de non uniformité ».

Nous notons $C_{NU} = (C_Q, C_X, C_B, C_{S_b}, C_n)$ l'ensemble des coefficients de non uniformité.

Impact sur les caractéristiques de l'écoulement

Pour déterminer analytiquement l'impact du changement d'un paramètre sur les caractéristiques de l'écoulement, il est nécessaire de faire l'hypothèse d'un bief rectangulaire large ($B \gg Y_n$). Dans ce cas, la hauteur normale est donnée par :

$$Y_n = \left(\frac{nQ}{B\sqrt{S_b}} \right)^{3/5} \quad (3.42)$$

et les caractéristiques de l'écoulement par :

$$F = \frac{Q}{\sqrt{gB^2Y_n^3}}, \quad \chi = S_b \frac{X}{Y_n}, \quad \kappa' = \frac{7}{3} - \kappa = \frac{8}{3} \frac{Y_n}{B}, \quad t_R = \frac{BY_n X}{Q} \quad (3.43)$$

On note F_0 , χ_0 , κ'_0 et t_{R0} les caractéristiques correspondant aux paramètres de référence.

Compte tenu de ces relations, il vient :

$$\begin{aligned} F &= C_Q^{1/10} C_B^{-1/10} C_{S_b}^{9/20} C_n^{-9/10} F_0 \\ \chi &= C_Q^{-3/5} C_X C_B^{3/5} C_{S_b}^{13/10} C_n^{-3/5} \chi_0 \\ \kappa' &= C_Q^{3/5} C_B^{-8/5} C_{S_b}^{-3/10} C_n^{3/5} \kappa'_0 \\ t_R &= C_Q^{-2/5} C_X C_B^{2/5} C_{S_b}^{-3/10} C_n^{3/5} t_{R0} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Ces relations traduisent l'impact du changement d'un paramètre sur les caractéristiques de l'écoulement.

La figure 3.20 présente les variations des caractéristiques en fonction des coefficients de non uniformité. Ces graphes traduisent la sensibilité des caractéristiques adimensionnelles et du temps de référence aux paramètres physiques du bief. On peut par exemple observer que F est plus sensible à la pente et à la rugosité qu'aux autres paramètres, dont le débit de linéarisation.

Prise en compte dans le transfert de débit

Nous supposons que divers renseignements sur le bief sont disponibles (profil longitudinal, courbe des surfaces drainées, etc.) et permettent une décomposition en sous-biefs sur lesquels les caractéristiques de l'écoulement pourront être supposées uniformes. Ces dernières seront calculées à partir des coefficients de non uniformité $C_{NU}^{(j)}$ relatifs à chaque sous-bief j . Les $C_{NU}^{(j)}$ seront donc supposés connus. Les caractéristiques du sous-bief j seront notées F_j , χ_j , κ_j et t_{Rj} .

La méthode détaillée ici permet d'obtenir la fonction de transfert du débit amont en $x = X$ en tenant compte de ces non uniformités. Le principe reste le même pour x quelconque et pour le transfert des débits latéraux. Pour chaque sous-bief j , la fonction de transfert de débit amont sera notée $TF_0^{(j)}$ et aura même forme que dans l'équation (3.35). Le débit aval de chaque sous-bief

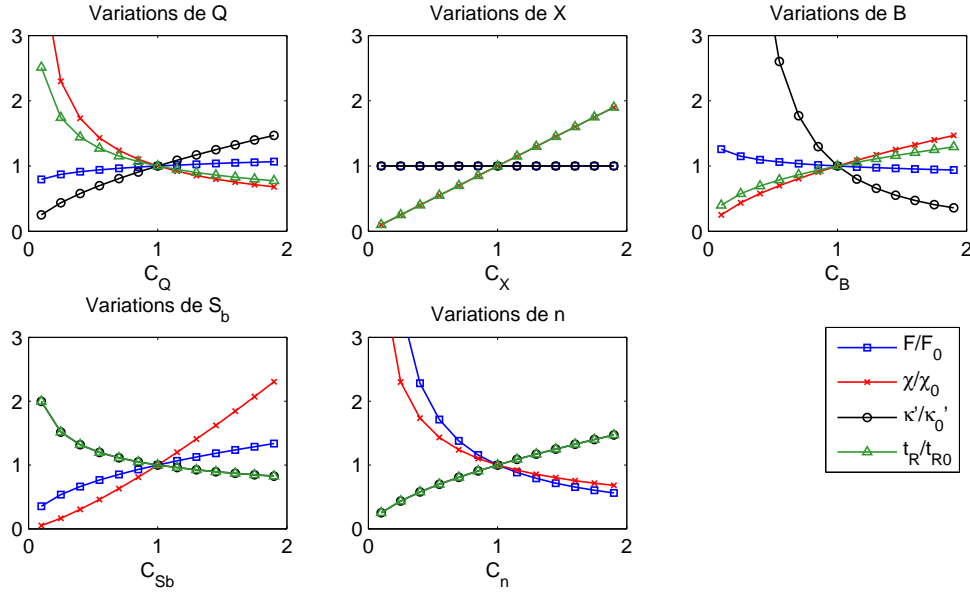


FIGURE 3.20 – Variations des caractéristiques en fonction des coefficients de non uniformité

sera donné par l'équation :

$$q(x_j, s) = TF_0^{(j)}(X_j, s)q(x_{j-1}, s) = e^{\lambda_{1j}X_j}q(x_{j-1}, s) \quad (3.45)$$

où x_j est l'abscisse de l'aval du sous-bief j , X_j la longueur de ce sous-bief et λ_{1j} la valeur propre associée à ce sous-bief.

On en déduit le débit à l'aval du bief :

$$q(X, s) = e^{\sum_j \lambda_{1j}X_j}q(0, s) \quad (3.46)$$

Or les termes λ_{1j} sont obtenus à partir des caractéristiques F_j , χ_j , κ_j et t_{Rj} , elles-même déterminées à partir de $C_{NU}^{(j)}$ et des caractéristiques de référence F_0 , χ_0 , κ_0 et t_{R0} . On montre ainsi que le transfert d'un débit amont est entièrement déterminé par les seules caractéristiques F_0 , χ_0 , κ_0 et t_{R0} .

La méthode des moments appliquée à cette nouvelle fonction de transfert permet d'obtenir la constante de temps K et le retard τ de la fonction de transfert approchée.

$$\begin{cases} K(X) = \sqrt{\sum_j 2t_{Rj}^2 \frac{f(F_j, \kappa_j)}{\chi_j}} \\ \tau(X) = \sum_j \frac{2t_{Rj}}{1+\kappa_j} - \sqrt{\sum_j 2t_{Rj}^2 \frac{f(F_j, \kappa_j)}{\chi_j}} \end{cases} \quad (3.47)$$

Remarque : Cette méthode requiert la connaissance des caractéristiques adimensionnelles. Dès lors, on ne peut plus se limiter à l'identification des paramètres $\tau_0(X)$ et $K_0(X)$ comme suggéré à la fin de la partie 3.2. Néanmoins, il reste possible de déduire F_0 , χ_0 et κ_0 à partir de $\tau_0(X)$ et $K_0(X)$ si l'on fixe *a priori* le paramètre F_0 ou χ_0 (le paramètre κ_0 ne peut pas être fixé puisqu'il

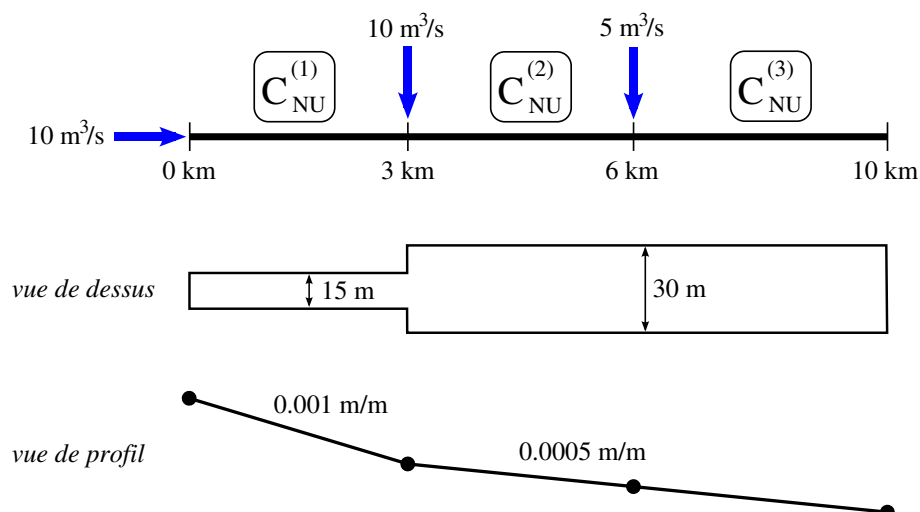


FIGURE 3.21 – Exemple du canal 4 avec variations significatives des paramètres caractéristiques

vaut $2t_{R0}/(\tau_0(X) + K_0(X))$.

Validation théorique

Le canal type 4 est choisi pour valider cette approche. On suppose que des débits intermédiaires permanents sont apportés au bief par deux affluents situés aux abscisses $x_1 = 3$ km et $x_2 = 6$ km respectivement. De plus, la largeur du bief passe de 15 m à 30 m au point x_1 , et la pente passe de 0.001 à 0.0005 à ce même point. La figure 3.21 illustre cet exemple.

Un débit triangulaire est alors injecté à l'amont. La figure 3.22 présente les résultats de simulation par le modèle LLR avec et sans prise en compte des coefficients de non uniformité. Ces résultats sont comparés aux résultats théoriques obtenus par le logiciel SIC. Le graphe montre que la prise en compte des coefficients de non uniformité permet d'améliorer la reconstitution du débit aval. Il est à noter cependant qu'il s'agit ici d'un cas théorique. Dans la réalité, il n'est pas toujours évident de caractériser des variations significatives des paramètres physiques, d'autant plus que le modèle simplifié fait appel aux paramètres d'un bief équivalent. Toutefois, dans certains cas, il peut être intéressant d'intégrer ces coefficients de non uniformité, notamment lorsque l'on recherche le débit à l'intérieur du bief et non plus seulement à l'aval.

En résumé : les coefficients de non uniformité

- Appliqués au cas rectangulaire large
- Traduisent des non uniformités importantes des caractéristiques de l'écoulement (rupture de pente, changement du régime de référence, etc.)
- Trois paramètres à caler (F_0 , χ_0 et κ_0)

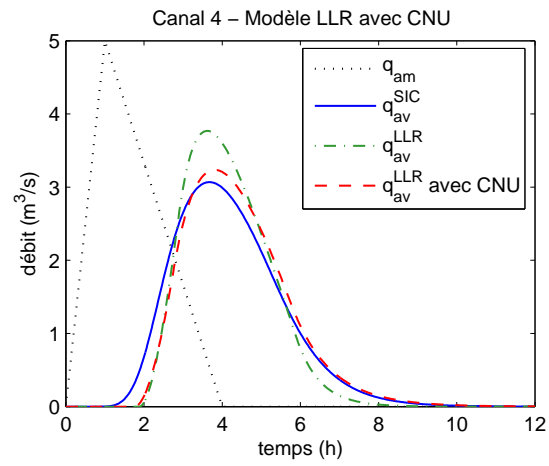


FIGURE 3.22 – Résultats de simulation par SIC et LLR avec ou sans prise en compte des C_{NU}

3.3 Transfert d'un débit latéral

3.3.1 Fonction de transfert du débit latéral

La résolution analytique des équations de Saint-Venant avec débit latéral est possible moyennant un certain nombre d'hypothèses. Moussa (1996) a établi la fonction de transfert d'un débit latéral uniformément distribué pour un bief semi-infini en partant de l'équation de l'onde diffusante (les termes d'inertie des équations de Saint-Venant sont négligés). Moramarco *et al.* (1999) ont écrit cette même fonction de transfert mais en prenant en compte les termes d'inertie. Fan et Li (2006) ont proposé une solution de l'équation de l'onde diffusante avec un débit latéral ponctuel ou uniformément distribué pour un bief fini, semi-infini ou infini. Cependant, tous ces auteurs ont proposé une solution dans le domaine temporel en faisant appel à un produit de convolution. Cette solution présente l'inconvénient d'être plus coûteuse en temps de calcul, et surtout moins adaptée aux outils de l'automatique qu'une solution fréquentielle du type premier ordre plus retard.

Nous avons précédemment décrit comment obtenir la fonction de transfert TF_0 relative au transfert de débit amont. Nous présentons ici une méthode similaire pour obtenir la fonction de transfert d'un débit latéral. Le débit amont est donc supposé nul dans cette partie ($q_0(s) = 0$). Pour les raisons précisées en 3.2, le bief sera supposé semi-infini, et le régime de référence uniforme.

Par ailleurs, nous supposerons que le débit latéral peut s'écrire sous la forme d'une somme de plusieurs débits latéraux, ce qui nous permettra de considérer indépendamment les apports de plusieurs sous-bassins versants, les échanges avec la nappe ainsi que les prélèvements pour l'irrigation :

$$q_l(x, t) = \sum_i r_{li}(x) q_{li}(t) \quad (3.48)$$

où r_{li} (en m^{-1}) représente la répartition du débit latéral q_{li} (en m^3/s) le long du bief. Afin d'obtenir des résultats analytiques, nous supposerons que les débits latéraux sont soit ponctuels, soit uniformément répartis sur une portion du bief.

En reprenant les équations de Saint-Venant linéarisées (3.10-3.11), et en appliquant la transformée de Laplace, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} q(x, s) \\ y(x, s) \end{pmatrix} = \Gamma(x, s) \begin{pmatrix} 0 \\ y_0(s) \end{pmatrix} + \sum_i \Phi_i(x, s) q_{li}(s) \quad (3.49)$$

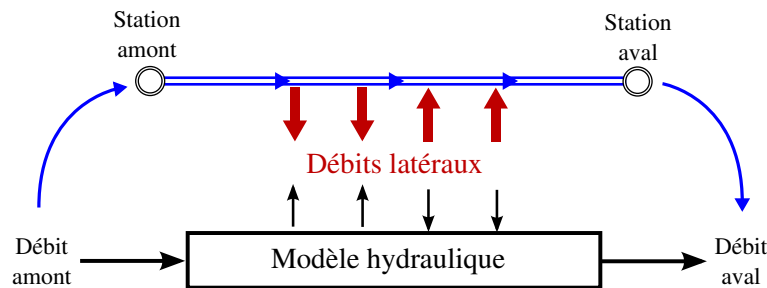


FIGURE 3.23 – Schéma du transfert des débits latéraux

avec $\Gamma(x, s)$ défini par l'équations (3.20) et

$$\Phi_i(x, s) = P_s \left(\int_0^x r_{li}(\xi) e^{D_s(x-\xi)} d\xi \right) P_s^{-1} \mathcal{B} \quad (3.50)$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-2V_0}{T_0(C_0^2 - V_0^2)} \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

Pour calculer analytiquement l'intégrale dans l'expression de Φ , il est nécessaire de faire une hypothèse sur la fonction de répartition du débit latéral, $r_{li}(x)$. Les cas simples de débits latéraux ponctuels et uniformément répartis sont présentés ici. Notons que des formes plus complexes de $r_{li}(x)$, du type polynomiale par exemple, permettraient également une résolution analytique. Nous cherchons à établir la fonction de transfert $TF_{li}(x, s)$ reliant le débit latéral $q_{li}(s)$ au débit $q(x, s)$ en tout point du cours d'eau.

$$q(x, s) = \sum_i TF_{li}(x, s) q_{li}(s) \quad (3.52)$$

Les cas d'un débit latéral ponctuel et d'un débit latéral uniformément distribué sont étudiés séparément.

3.3.2 Débit latéral ponctuel

Nous supposons dans cette partie que le débit latéral $q_l(x, t) = r_{li}(x) q_{li}(t)$ est injecté ponctuellement dans le bief à l'abscisse x_{pi} . La fonction de répartition s'écrit alors :

$$r_{li} = \delta(x - x_{pi}) \quad (3.53)$$

où δ est la fonction Dirac.

Le calcul de la matrice Φ_i conduit à :

$$\Phi_i(x, s) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_{pi} \\ \Gamma(x - x_{pi}, s) \mathcal{B} & \text{si } x \geq x_{pi} \end{cases} \quad (3.54)$$

On suppose dans un premier temps que le bief est fini. La condition à la limite aval est obtenue par l'équation (3.22) correspondant à la linéarisation de l'équation d'ouvrage aval. Notons que sous l'hypothèse d'un régime de référence uniforme, la dynamique de l'écoulement est entièrement décrite par les caractéristiques adimensionnelles F_0 , χ_0 et κ_0 . Les valeurs propres sont données, sous leur forme adimensionnelle, par l'équation (3.36).

Dans ce cas, la résolution de l'équation (3.49) permet d'écrire la fonction de transfert TF_{li} sous la forme :

$$TF_{li}(x, s) = \alpha(x) \frac{1 - \beta e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x_{pi}}}{1 - \beta} \frac{1 - \rho e^{(\lambda_1 - \lambda_2)(X-x)}}{1 - \rho e^{(\lambda_1 - \lambda_2)X}} e^{\lambda_1(x-x_{pi})} \quad (3.55)$$

avec

$$\beta = \frac{k_l \lambda_1 + Ts}{k_l \lambda_2 + Ts} \quad (3.56)$$

$$k_l = -\frac{T_0(C_0^2 - V_0^2)}{2V_0} \quad (3.57)$$

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)x}}{1 - \rho e^{(\lambda_1 - \lambda_2)(X-x)}} \left(1 - \frac{1 - \rho e^{(\lambda_1 - \lambda_2)X}}{1 - \beta e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x_{pi}}} \right) & \text{si } x < x_0 \\ 1 & \text{si } x \geq x_0 \end{cases} \quad (3.58)$$

La partie $e^{\lambda_1(x-x_{pi})}$ représente le transfert direct entre le point d'injection et le point d'observation. Le terme $\frac{1 - \rho e^{(\lambda_1 - \lambda_2)(X-x)}}{1 - \rho e^{(\lambda_1 - \lambda_2)X}}$ traduit l'impact de la condition à la limite aval. Le facteur $\frac{1 - \beta e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x_{pi}}}{1 - \beta}$ n'apparaît pas dans l'expression du transfert d'un débit amont (équation (3.23)), il traduit donc le fait que le débit est introduit latéralement dans le bief et s'en trouve « amorti ». Enfin le terme $\alpha(x, s)$ traduit l'influence d'une injection ponctuelle à l'amont du point d'injection.

Remarque : Il est possible d'interpréter l'équation (3.55) d'une autre façon. En effet, on peut reconnaître la fonction de transfert TF_0 de l'équation (3.23) qui traduit la propagation d'un débit amont dans un écoulement uniforme avec condition à la limite aval. Le débit $q(x, s)$ est alors obtenu par

$$q(x, s) = TF_0(x, s)q_{0i}(s)$$

où q_{0i} représente un débit amont équivalent au débit latéral q_{li} obtenu par l'équation :

$$q_{li}(s) = TF_{0i}(x_{pi}, s)q_{0i}(s) = \frac{1 - \beta}{1 - \beta e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x_{pi}}} e^{\lambda_1 x_{pi}} q_{0i}(s)$$

La fonction de transfert TF_{0i} a la même forme que TF_0 , en remplaçant ρ par β et en prenant $X = x_{pi}$. La fonction TF_{0i} traduit donc le transfert d'un débit amont dans un bief de longueur x_{pi} et avec un coefficient de *feedback* k_l .

3.3.3 Simplification de la fonction de transfert

Influence à l'amont d'une injection ponctuelle

La fonction $\alpha(x)$ traduit l'influence d'une injection ponctuelle à l'amont du point d'injection. Lorsque seul le débit aval est recherché, ce terme vaut toujours 1 et peut être supprimé de la fonction de transfert. Par contre, si l'on souhaite modéliser le débit à l'intérieur du bief, il convient d'analyser cette fonction de plus près.

La figure 3.24 représente le diagramme de Bode de la fonction α en différents points à l'amont d'une injection ponctuelle située en $x_{pi} = 0.4X$, pour le canal C2.

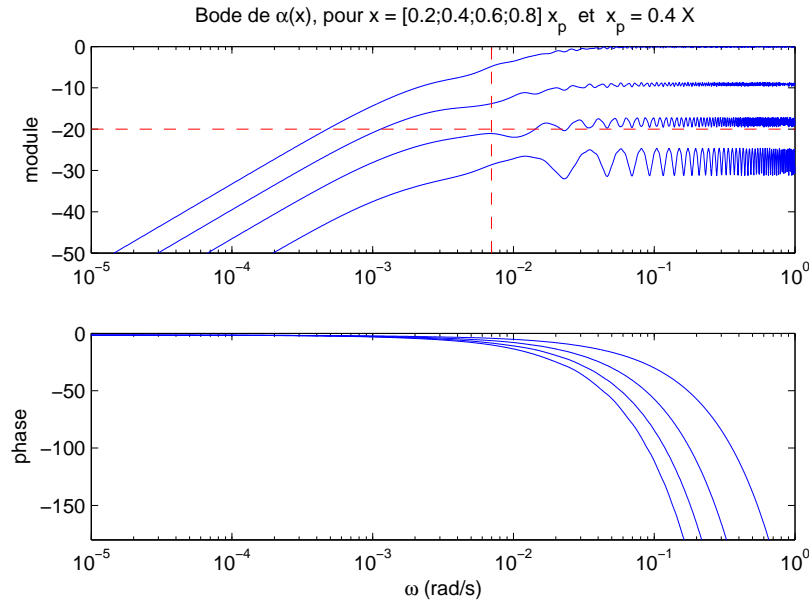


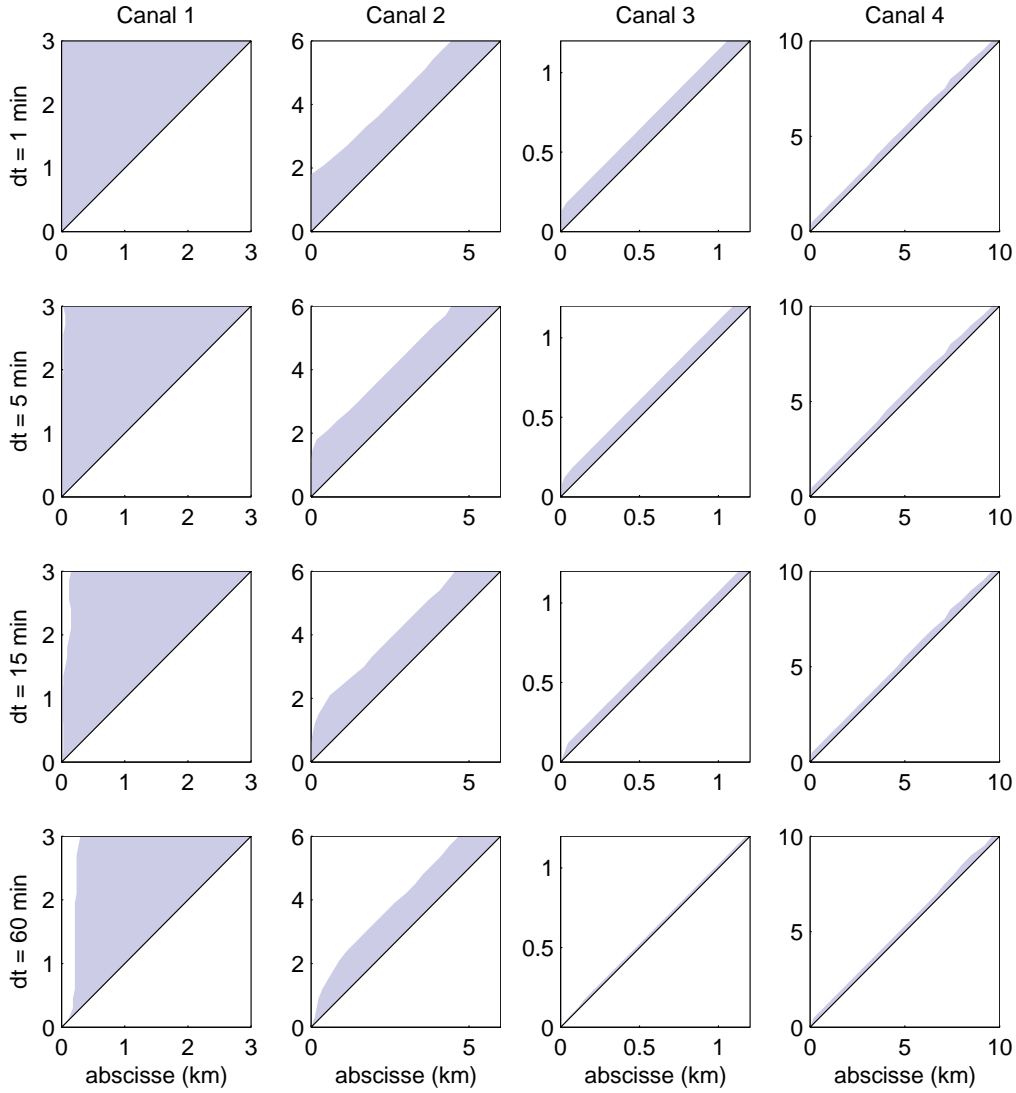
FIGURE 3.24 – Diagramme de Bode de la fonction α en différents points à l'amont d'une injection ponctuelle située en $x_{pi} = 0.4X$, pour le canal C2

Ce graphe montre que la fonction α se comporte comme un filtre passe-haut, dont la fréquence de coupure augmente et le gain en hautes fréquences diminue lorsque l'on s'éloigne du point d'injection. Deux lignes ont été ajoutées à ce graphe. La ligne verticale correspond à une pulsation de $2\pi/\Delta t$ avec $\Delta t = 15$ min. Il s'agit de la fréquence la plus haute que l'on peut représenter avec un signal échantillonné au pas de temps Δt . Pour avoir un ordre d'idée, un pas de temps d'une heure correspond à une pulsation maximale de $\omega = 1.7 \cdot 10^{-3}$ rad/s. La ligne horizontale correspond à une atténuation de 20 dB, ce qui signifie que le signal de sortie est atténué de 90 %. On voit d'après ce graphe, qu'il est possible de trouver une abscisse maximale x_M tel que tout le spectre de la fonction α soit situé au-dessous de la ligne -20 dB pour toutes les fréquences inférieures à $1/\Delta t$. On peut alors définir la zone d'influence de la fonction α par l'intervalle $[x_M; x_{pi}]$. Ainsi, pour $x < x_M$, la fonction de transfert TF_{li} sera très faible, et pour $x > x_{pi}$, TF_{li} sera amputée du terme α . La figure 3.25 présente la zone d'influence de α pour $0 < x_{pi} < X$ sur les quatre canaux types et pour différentes valeurs de Δt (l'abscisse d'injection x_{pi} est représentée en ordonnée).

Ces graphes montrent que pour le canal C1, quelle que soit la position d'injection du débit latéral, le débit à l'amont est sous l'influence de la fonction α . On peut voir que pour les autres canaux, la zone d'influence est concentrée à l'amont immédiat du point d'injection. Etant donné que les biefs modélisés par la suite représentent généralement des biefs longs (compte tenu de la distance entre deux stations de mesures), nous négligerons par la suite le terme α .

Amortissement dû à l'injection latérale

Nous nous intéressons maintenant au facteur $\frac{1-\beta e^{(\lambda_1-\lambda_2)x_{pi}}}{1-\beta}$. Tout d'abord le graphe de gauche de la figure 3.26 représente le diagramme de Bode du terme $\beta e^{(\lambda_1-\lambda_2)x_{pi}}$ pour différentes valeurs de

FIGURE 3.25 – Zone d'influence du terme $\alpha(x)$ pour différentes valeurs de x_{pi}

x_{pi} comprises entre $X/10$ et $9X/10$ sur le canal C2. Il est clair d'après ce graphe que, sauf pour des valeurs très faibles de x_{pi} (injection très proche de l'amont), ce terme est très petit devant 1, et donc en l'occurrence négligeable. La fonction de transfert TF_{li} pourra donc être approchée par :

$$TF_{li}(x, s) = TF_{\beta}(s)e^{-\lambda_1 x_{pi}} TF_0(x, s), \quad \text{avec} \quad TF_{\beta} = \frac{1}{1 - \beta} \quad (3.59)$$

Sur le deuxième graphe de la figure 3.26 est tracé le diagramme de Bode de la fonction de transfert TF_{β} . Rappelons que dans un contexte opérationnel, les données sont discrétisées selon un pas de temps Δt , et que les fréquences supérieures à $1/\Delta t$ ne sont donc pas représentées. Etant donné que la fonction de transfert TF_{β} se comporte comme un filtre passe-bas, on peut légitimement se demander si elle aura une influence sur le transfert de débit latéral. En effet, si sa

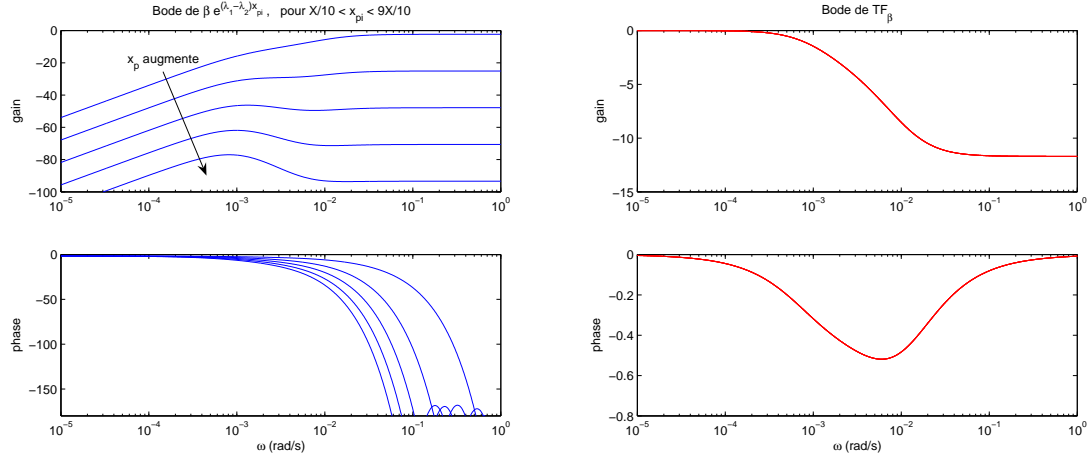


FIGURE 3.26 – Diagramme de Bode du facteur $\beta e^{(\lambda_1^* - \lambda_2^*) x_{pi}^*}$ pour différentes valeurs de x_{pi} (à gauche) et diagramme de Bode de la fonction de transfert TF_β (à droite)

fréquence de coupure est inférieure à la fréquence correspondant à Δt , l'atténuation n'affectera que des fréquences non visibles dans le signal. Pour étudier cela de plus près, nous proposons d'approcher la fonction TF_β par le premier ordre suivant :

$$\widetilde{TF}_\beta(s) = \frac{1}{1 + K_\beta s} \quad (3.60)$$

L'expression de K_β est déterminée à partir du développement de Taylor à l'ordre 1 du terme β , ce qui conduit à :

$$K_\beta = \frac{2t_R}{(1 + \kappa_0)\chi_0} \left(\frac{1 - F_0^2}{1 + \kappa_0} + F_0^2 \right) \quad (3.61)$$

Cette expression permet d'établir un critère sur les caractéristiques F_0 , χ_0 , κ_0 et t_R , qui renseigne sur le pas de temps minimum Δt_β permettant de négliger les effets de TF_β . En effet, la fréquence de coupure du filtre \widetilde{TF}_β vaut $1/(2\pi K_\beta)$. Ainsi, on pourra supprimer le terme TF_β de l'expression de TF_{li} si $\Delta t > \Delta t_\beta = 2\pi K_\beta$.

Le tableau 3.4 présente, pour chaque canal type, la valeur du terme K_β et le pas de temps minimum Δt_β permettant de négliger le facteur TF_β .

Canal	C1	C2	C3	C4
K_β (min)	126	8.2	1.3	4.6
Δt_β (min)	791	51	8	29

TABLEAU 3.4 – Valeur de K_β et Δt_β pour les canaux types

Encore une fois, on note que pour le canal 1, il faudrait un pas de temps supérieur à 791 min, soit 33 h, pour pouvoir négliger le facteur TF_β . En revanche, pour les autres canaux, les valeurs obtenues pour K_β sont proches des pas de temps que l'on aurait en pratique. Donc même si le facteur TF_β a une influence sur la dynamique, celle-ci restera modérée. La fonction TF_β sera donc également négligée dans la suite.

Remarque :

Notons toutefois qu'il n'est possible d'écrire ce critère que si les caractéristiques du bief sont connues, ce qui n'est pas toujours le cas avant l'étape d'identification. La logique voudrait alors que le modèle de transfert intègre la fonction \widetilde{TF}_β et que le critère soit appliqué sur les paramètres une fois ceux-ci identifiés. Cependant, trois paramètres sont à caler lorsque l'on prend en compte TF_β (F_0 , χ_0 et κ_0), alors que dans le cas contraire, les seuls paramètres $\tau_0(X)$ et $K_0(X)$ suffisent à décrire le transfert (voir ci-après).

Un modèle à 2 paramètres

Si l'on suppose à présent que le bief est semi-infini ($X \rightarrow +\infty$), le terme $\frac{1-\rho e^{(\lambda_1-\lambda_2)(X-x)}}{1-\rho e^{(\lambda_1-\lambda_2)X}}$ disparaît. De même que la fonction de transfert TF_0 pour un bief semi-infini, TF_{li} peut s'écrire uniquement en fonction des trois variables adimensionnelles F_0 , χ_0 , κ_0 , d'un temps de référence t_R et des abscisses adimensionnelles $x^* = x/X$ et $x_{pi}^* = x_{pi}/X$:

$$TF_{li}(x, s) = e^{\lambda_1^*(x^* - x_{pi}^*)} \quad (3.62)$$

où λ_1^* est la valeur propre adimensionnelle (définie par l'équation (3.36)).

Finalement, la fonction de transfert d'un débit latéral ponctuel que nous retiendrons pour la suite s'écrit :

$$TF_{li}(x, s) = TF_0(x - x_{pi}, s) \quad (3.63)$$

Cette fonction de transfert « exacte » est approchée par une fonction \widetilde{TF}_{li} du type premier ordre avec retard :

$$\widetilde{TF}_{li}(x, s) = G_{li}(x) \frac{e^{-\tau_{li}(x)s}}{1 + K_{li}(x)s} \quad (3.64)$$

Les paramètres G_{li} , τ_{li} et K_{li} sont obtenus par :

$$\begin{cases} G_{li}(x) &= 1 \\ \tau_{li}(x) &= \tau_0(x - x_{pi}) \\ K_{li}(x) &= K_0(x - x_{pi}) \end{cases} \quad (3.65)$$

Puisque les fonctions $\tau_0(x)$ et $K_0(x)$ sont déterminées à partir de $\tau_0(X)$ et $K_0(X)$, la fonction de transfert d'un débit latéral ponctuel est aussi déterminée à partir de ces deux paramètres uniquement.

En résumé : le modèle LLR étendu aux débits latéraux ponctuels

- Débits latéraux considérés indépendamment les uns des autres (hypothèse de linéarité)
- Fonctions de transfert distribuées du type premier ordre avec retard : $\widetilde{TF}_{li}(x, s) = \frac{e^{-\tau_{li}(x)s}}{1 + K_{li}(x)s}$
- Paramètres $\tau_{li}(x)$ et $K_{li}(x)$ déterminés analytiquement à partir de $(\tau_0(X), K_0(X))$ et de l'abscisse du point d'injection x_{pi}

3.3.4 Débit latéral uniformément distribué

Ponctuel ou distribué

En théorie, le terme q_l dans les équations de Saint-Venant (3.1-3.2) permet de prendre en compte un débit latéral dépendant à la fois de x et de t . L'écriture simplificatrice du débit latéral (3.48) suggère que les débits latéraux peuvent être injectés dans le bief selon une répartition quelconque. Cependant, afin d'obtenir des résultats analytiques, deux types de répartition ont été retenus et représentent le cas d'un débit latéral ponctuel et celui d'un débit latéral uniformément distribué. Ces deux types d'injection sont les seuls proposés par les logiciels de simulation hydraulique tels que SIC, HEC-RAS ou Mike 11. Si la notion de débit latéral ponctuel semble correspondre à un certain nombre de cas réels (apports d'un affluent, prélèvement en rivière, etc.), celle de débit latéral uniformément distribué paraît en revanche plus théorique ou conceptuelle. Etant donné que le modèle hydraulique développé dans cette thèse est un modèle simplifié à base physique, il semble malgré tout intéressant d'intégrer ce type de débit latéral.

Pour un débit latéral donné, le choix de la forme d'injection peut avoir un impact significatif sur la dynamique de l'écoulement. Pour illustrer cette assertion, nous proposons de considérer trois types d'injection d'un débit latéral sur le canal type 4 : injection ponctuelle située au milieu du bief, injection uniformément répartie sur la moitié amont et injection uniformément répartie sur tout le bief (voir figure 3.27). Le débit injecté est caractérisé par un hydrogramme triangulaire d'une durée de 2 heures avec un débit de pointe de $10 \text{ m}^3/\text{s}$. La figure 3.28 présente l'hydrogramme du débit injecté, et les hydrogrammes en trois points du bief ($x = [3; 7; 10] \text{ km}$) pour chaque forme d'injection considérée.

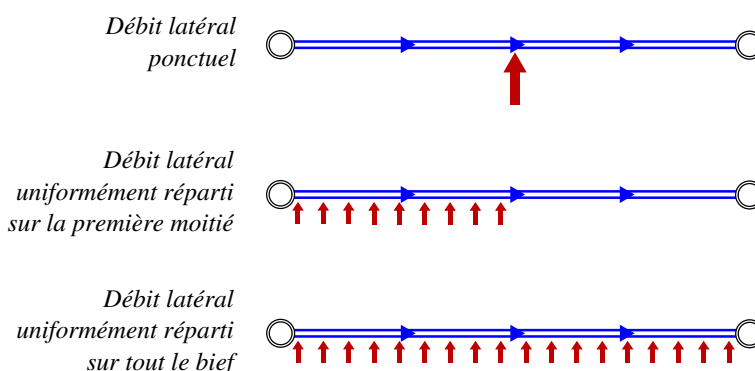


FIGURE 3.27 – Débit latéral ponctuel et uniformément réparti sur tout ou partie du bief

Ces graphes montrent clairement que la réponse à une injection latérale dépend fortement du type d'injection. Par exemple, une injection ponctuelle produit à l'aval ($x = 7 \text{ km}$ et $x = 10 \text{ km}$) une onde de crue plus marquée qu'une injection diffuse, avec une montée plus rapide et un pic plus important. Par contre, cette même injection est invisible à l'amont en $x = 3 \text{ km}$. Enfin, une injection diffuse sur la moitié amont produit une onde de crue plus importante mais plus tardive qu'une injection diffuse sur tout le bief.

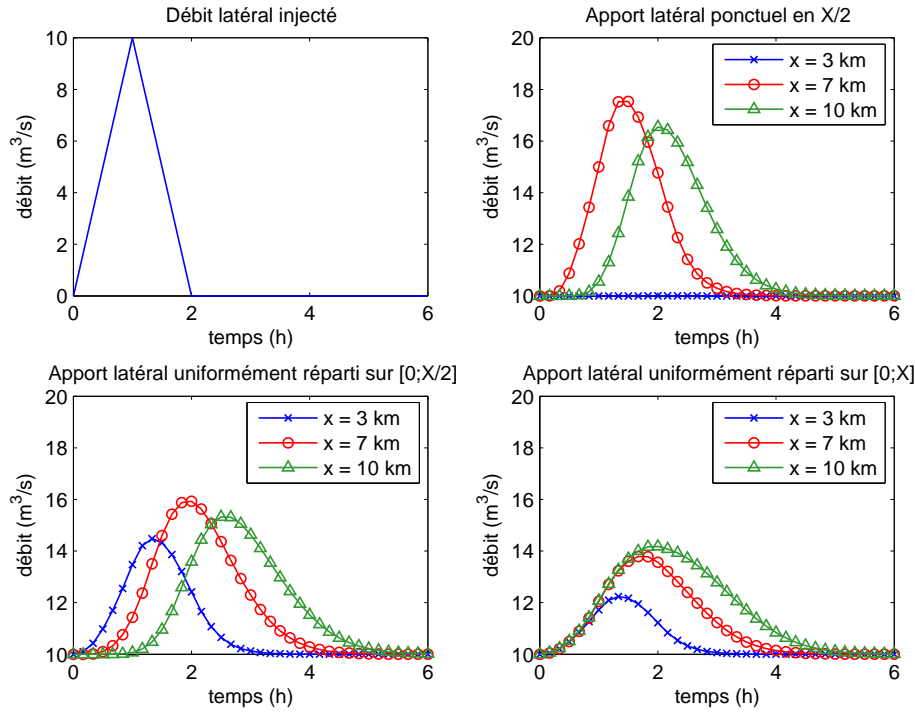


FIGURE 3.28 – Débits en différents points du bief pour un apport latéral ponctuel ou uniformément réparti sur tout ou partie du bief ($X = 10$ km)

Fonction de transfert

Nous avons vu que la fonction de transfert d'un débit latéral ponctuel pouvait être ramenée à la fonction de transfert d'un débit amont dans le cas où le bief est supposé semi-infini.

Dans cette partie, on considère un débit latéral $q_l(x, t) = r_{li}(x)q_{li}(t)$ uniformément distribué. Dans ce cas, la fonction de répartition s'écrit :

$$r_{li}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_{di} - x_{ui}} & \text{si } x_{ui} \leq x \leq x_{di} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.66)$$

où $[x_{ui}, x_{di}]$ définit l'intervalle d'injection.

Si le bief est supposé semi-infini et si l'on néglige les ondes ascendantes, alors un débit latéral distribué peut être considéré comme une somme intégrale de débit latéraux ponctuels situés à l'amont du point considéré. Si $x < x_{ui}$, l'intégrale portera sur un intervalle nul, la fonction de transfert sera donc nulle. Si $x_{ui} \leq x < x_{di}$, l'intégrale portera sur l'intervalle $[x_{ui}, x]$. Enfin, si $x \geq x_{di}$, l'intégrale portera sur l'intervalle $[x_{ui}, x_{di}]$. La fonction de transfert TF_{li} peut alors s'écrire sous la forme :

$$TF_{li}(x, s) = \frac{1}{x_{di} - x_{ui}} \left[\int_{x_{ui}}^x \mathcal{H}(\xi - x_{ui}) e^{\lambda_1(x-\xi)} d\xi - \int_{x_{di}}^x \mathcal{H}(\xi - x_{di}) e^{\lambda_1(x-\xi)} d\xi \right] \quad (3.67)$$

où \mathcal{H} est la fonction de Heaviside ($\mathcal{H}(x) = 0$ si $x < 0$ et 1 sinon).

Ainsi, en posant $x_{ui}^* = x_{ui}/X$ et $x_{di}^* = x_{di}/X$, le calcul conduit à :

$$TF_{li}(x, s) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq x_{ui} \\ \frac{e^{\lambda_1^*(x_{di}^* - x_{ui}^*)} - 1}{\lambda_1^*(x_{di}^* - x_{ui}^*)} & \text{si } x_{ui} < x \leq x_{di} \\ \frac{e^{\lambda_1^*(x_{di}^* - x_{ui}^*)} - 1}{\lambda_1^*(x_{di}^* - x_{ui}^*)} e^{\lambda_1^*(x^* - x_{di}^*)} & \text{si } x_{di} < x \end{cases} \quad (3.68)$$

Lorsque $x_{ui} < x \leq x_{di}$, le débit latéral est injecté à l'amont immédiat du point d'observation. Il n'y a donc pas de retard entre le débit $q_{li}(t)$ et le débit $q(x, t)$. Dans ce cas, la fonction de transfert TF_{li} sera approchée par une fonction de type premier ordre (sans retard) :

$$\widetilde{TF}_{li}(x, s) = \frac{G_{li}(x)}{1 + K_{di}(x)s} \quad (3.69)$$

Les paramètres K_{di} et G_{li} sont obtenus par :

$$\begin{cases} G_{li}(x) &= \frac{x^* - x_{ui}^*}{x_{di}^* - x_{ui}^*} \\ K_{di}(x) &= t_R \frac{x^* - x_{ui}^*}{1 + \kappa_0} = \frac{1}{2}[\tau_0(x - x_{ui}) + K_0(x - x_{ui})] \end{cases} \quad (3.70)$$

Si $x > x_{di}$, alors l'équation (3.68) montre que le débit en x peut être considéré comme le débit en x_{di} propagé sur la distance $x - x_{di}$. La fonction de transfert TF_{li} pourra être approchée cette fois par un deuxième ordre avec retard :

$$\widetilde{TF}_{li}(x, s) = \frac{G_{li}(x)e^{-\tau_{li}(x)}}{(1 + K_{di}(x)s)(1 + K_{li}(x)s)} \quad (3.71)$$

avec :

$$\begin{cases} G_{li}(x) &= 1 \\ K_{di}(x) &= \frac{1}{2}[\tau_0(x_{di} - x_{ui}) + K_0(x_{di} - x_{ui})] \\ K_{li}(x) &= K_0(x - x_{di}) \\ \tau_{li}(x) &= \tau_0(x - x_{di}) \end{cases} \quad (3.72)$$

Ces résultats montrent que le transfert d'un débit latéral uniformément distribué est, lui aussi, déterminé à partir de deux paramètres uniquement : $\tau_0(X)$ et $K_0(X)$.

En résumé : le modèle LLR étendu aux débits latéraux uniformément distribués

- Fonctions de transfert du type premier ordre avec gain statique : $\widetilde{TF}_{li}(x, s) = \frac{G_{li}(x)s}{1 + K_{di}(x)s}$
- Fonctions de transfert du type deuxième ordre avec retard lorsque le point d'observation est à l'aval de l'intervalle d'injection ($x > x_{di}$) : $\widetilde{TF}_{li}(x, s) = \frac{1}{1 + K_{di}(x)s} \frac{e^{-\tau_{li}(x)s}}{1 + K_{li}(x)s}$
- Paramètres $G_{li}(x)$, $K_{di}(x)$, $\tau_{li}(x)$ et $K_{li}(x)$ déterminés analytiquement à partir de $(\tau_0(X), K_0(X))$ et de l'intervalle d'injection $[x_{ui}; x_{di}]$

3.3.5 Validation

Afin de valider l'approche, nous reprenons l'exemple illustré sur la figure 3.23. Trois types de débits latéraux sont considérés sur le canal 4 : un débit latéral pontuel injecté au milieu du bief, un débit latéral diffus sur la moitié amont du bief et un débit latéral diffus sur tout le bief. Les résultats du modèle sont comparés à ceux du logiciel SIC et illustrés sur la figure 3.29 (courbes en pointillés). Ces graphes montrent que le modèle reproduit assez bien le débit aux points considérés pour les trois formes de débit latéral, avec toutefois une légère surestimation des débits de pointe. Cette surestimation pourrait être améliorée en augmentant l'ordre du modèle simplifié.

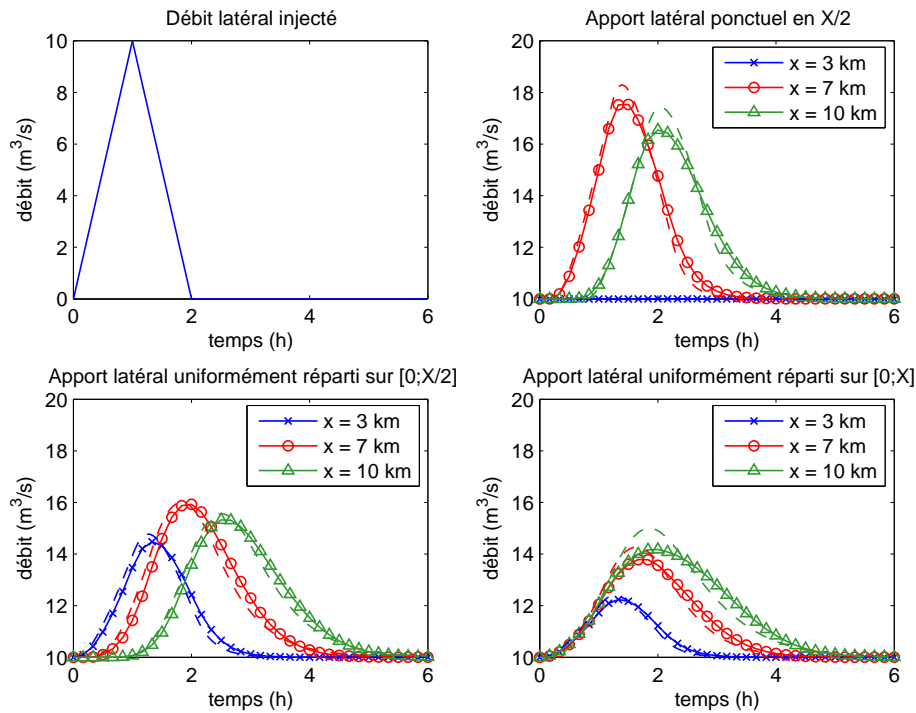


FIGURE 3.29 – Résultats de validation du modèle simplifié pour un apport latéral ponctuel ou uniformément réparti sur tout ou partie du bief. Comparaison avec les résultats d'un modèle de Saint-Venant complet.

3.3.6 Cohérence physique entre pas de temps et pas d'espace

Nous avons déjà évoqué l'existence du nombre de Courant qui permet d'assurer une diffusion numérique minimum lors de la résolution numérique des équations de Saint-Venant. Ce nombre met en relation le pas de temps et le pas d'espace utilisés dans la discrétisation spatio-temporelle du système.

L'approche développée ici, basée sur une modélisation simplifiée du transfert en cours d'eau, révèle un lien entre pas de temps et pas d'espace, non pas par rapport à l'algorithme de résolution mais relativement au phénomène physique de transfert de débit.

Fréquence de coupure, fréquence d'atténuation

Notre analyse est basée sur deux observations. La première est que pour un signal échantillonné à un pas de temps Δt , il est impossible d'en connaître les composantes dont la fréquence est supérieure à $1/\Delta t$ (théorème de Shannon). La seconde observation est qu'un bief se comporte comme un filtre « passe-bas », que l'on a approché par une fonction de transfert du type premier ordre plus retard. La constante de premier ordre K_0 et le retard τ_0 dépendent de la distance sur laquelle se propage le débit. Ces fonctions sont croissantes, ce qui signifie que plus la distance de propagation est grande, plus l'atténuation et le retard sont importants. Le principe est alors de relier les fréquences caractéristiques du transfert au pas de temps Δt .

Ainsi, pour chaque distance de propagation x , on peut déterminer une fréquence de coupure $f_c(x)$ en-deçà de laquelle l'atténuation est négligeable (inférieure à 3 dB), et une fréquence d'atténuation $f_a(x)$ au-delà de laquelle on peut considérer que le signal n'est plus transmis (atténuation supérieure à 20 dB). Ces définitions sont illustrées sur la figure 3.30. Les flèches sur le graphe montrent que les fréquences f_c et f_a augmentent quand x diminue.

Pour une fonction de transfert du type premier ordre avec retard de paramètres τ et K , les fréquences de coupure et d'atténuation sont définies par :

$$f_c = \frac{1}{2\pi K} \quad \text{et} \quad f_a = \frac{10}{2\pi K} \quad (3.73)$$

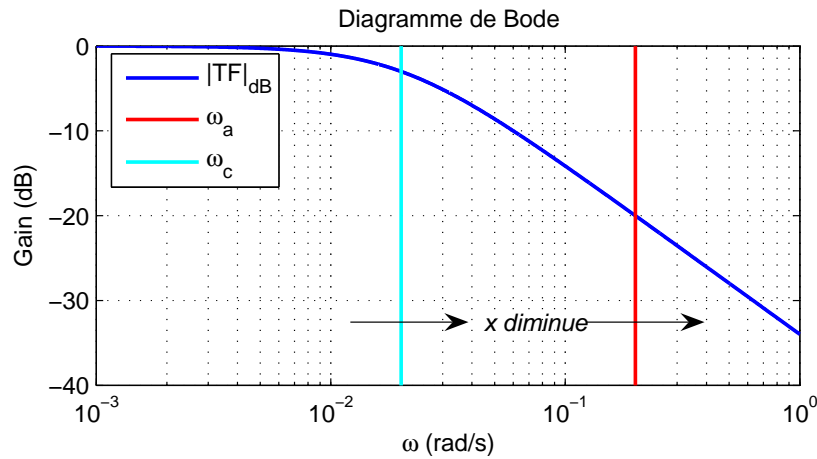


FIGURE 3.30 – Illustration des fréquences de coupure et d'atténuation (diagramme de Bode d'une fonction de transfert du premier ordre)

Choix de Δt et Δx par rapport aux caractéristiques du bief

En général, le pas de temps Δt est fixé par les données disponibles. Pour un pas de temps donné, on peut trouver une distance minimale Δx_{min} telle que $f_c = 1/\Delta t$. Alors, pour $x < \Delta x_{min}$, le débit amont n'est pas atténué, et il n'est donc pas nécessaire de prendre en compte le phénomène d'atténuation sur une distance inférieure à Δx_{min} . On peut également trouver une autre distance

minimale telle que le temps de réponse³ à 80 ou 90 % est inférieur au pas de temps. Le débit aval est dans ce cas quasiment identique au débit amont compte tenu du temps écoulé entre deux mesures.

La figure 3.31 permet d'illustrer ce phénomène avec un pas de temps de 5 min. On suppose que la fonction de transfert représente exactement la dynamique, et que le débit amont subit une variation entre les deux premiers pas de temps de 1 m³/s. Sur le graphe de gauche, on considère une fonction de transfert du premier ordre sans retard, avec $K = 1$ min et $\tau = 0$ min. On peut voir que le phénomène d'atténuation est très peu visible dans cet exemple, puisqu'à l'instant où l'on observe la variation du débit amont (à $t = 5$ min), le débit aval est quasiment égal au débit amont. Ce n'est plus le cas lorsque l'on considère en plus un retard de 2 min (graphe de droite). La dynamique serait invisible si le pas de temps valait 10 min.

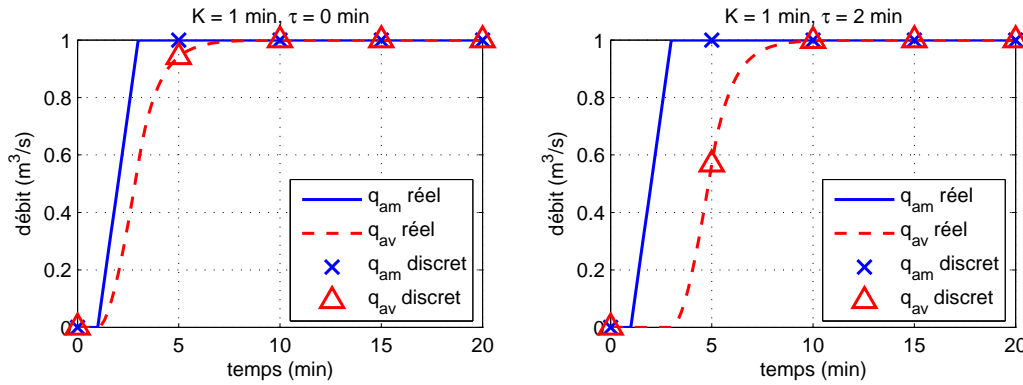


FIGURE 3.31 – Illustration du lien entre le pas de temps et les paramètres τ et K de la fonction de transfert

Pour en revenir au lien entre le pas d'espace et le pas de temps, chercher Δx_{min} revient à chercher la distance minimale sur laquelle le transfert est invisible. Si l'on utilise comme critère le temps de réponse à 90 %, noté $T_R^{(90)}(x)$, Δx_{min} est défini par :

$$T_R^{(90)}(\Delta x_{min}) = \Delta t \quad (3.74)$$

Or $T_R^{(90)}$ s'obtient par la relation (Munier *et al.*, 2009) :

$$T_R^{(90)}(x) = \tau_0(x) + 2.3K_0(x) \quad (3.75)$$

En utilisant les relations (3.40) et (3.75), il vient :

$$\Delta x_{min} = X \left[-\frac{1.3K_0(X)}{2(\tau_0(X) + K_0(X))} + \sqrt{\frac{1.69K_0(X)^2}{4(\tau_0(X) + K_0(X))^2} + \frac{\Delta t}{\tau_0(X) + K_0(X)}} \right]^2 \quad (3.76)$$

La figure 3.32 présente, pour le canal type 4, la réponse à une entrée échelon pour différents pas de temps en $x = \Delta x_{min}$ et $x = 2\Delta x_{min}$. Les graphes montrent bien que pour chaque pas de

3. Le temps de réponse à α % correspond au temps nécessaire pour que le débit atteigne α % de sa valeur finale. L'approche LBLR a permis d'en établir une formule analytique (Munier *et al.*, 2009).

temps considéré, $q(\Delta x_{min}, \Delta t) = 0.9 \text{ m}^3/\text{s}$, soit 90 % de la valeur finale. En ce point, le transfert peut être négligé et le débit peut être considéré comme égal au débit amont. En $x = 2\Delta x_{min}$, on observe une atténuation plus marquée ; on a alors intérêt à prendre en compte la dynamique du transfert.

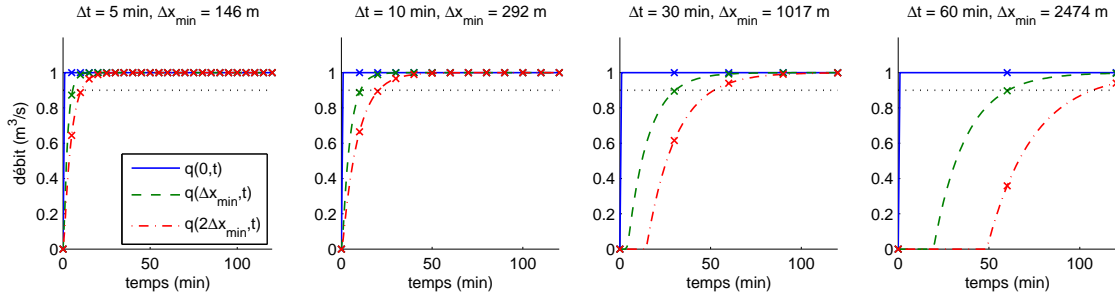


FIGURE 3.32 – Réponse à un échelon pour différents pas de temps en $x = \Delta x_{min}$ et $x = 2\Delta x_{min}$ (le signal échantillonné est représenté par les croix)

Sur la figure 3.33, on peut voir l'évolution de Δx_{min} en fonction de Δt pour les quatre canaux types. D'après ce graphe, pour un pas de temps d'une heure, qui est le pas de temps que l'on utilisera dans les chapitres 4 et 5, Δx_{min} peut atteindre plusieurs kilomètres.

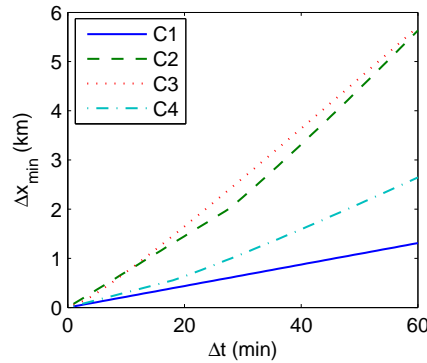


FIGURE 3.33 – Variation de Δx_{min} en fonction de Δt pour les canaux types

Discretisation des transferts latéraux

Ces considérations permettent de proposer une décomposition du bief en fonction d'un pas de temps donné. En effet, deux injections ponctuelles très rapprochées pourront être vues à l'aval comme une seule et même injection. La valeur de Δx_{min} fournit ainsi un pas d'espace minimum en-deçà duquel la décomposition spatiale du système perd son sens du point de vue de la dynamique dans le bief. Cette décomposition spatiale permet par la suite d'aborder la modélisation des transferts latéraux, comme par exemple les apports dus aux pluies.

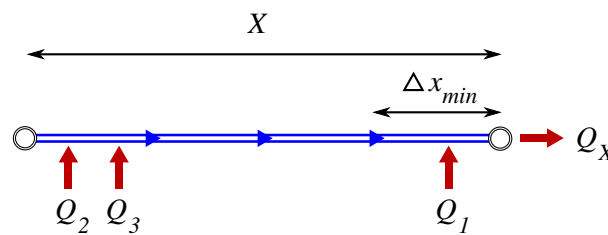
En outre, il est possible d'utiliser plusieurs décompositions en fonction du débit latéral considéré. Par exemple, si les apports dus aux pluies sont calculés au pas de temps horaire, une décomposition spatiale découlera de cette valeur de Δt . Si, en même temps, on considère les prélèvements

pour l'irrigation au pas de temps journalier, une autre décomposition pourra être appliquée. De même si les échanges avec la nappe sont évalués au pas de temps hebdomadaire.

Notons toutefois que les paramètres du modèle ($\tau_0(X)$ et $K_0(X)$) sont en général calés en même temps que le modèle intégré. S'il est possible d'avoir une estimation *a priori* des paramètres caractéristiques, alors le calcul de Δx_{min} permet une décomposition spatiale à peu près cohérente avec la dynamique de l'écoulement dans le bief.

En résumé : cohérence physique entre pas de temps et pas d'espace

Pour un pas de temps Δt donné, calcul d'un pas d'espace minimum Δx_{min} lié au phénomène d'atténuation (ou au temps de réponse)



- Q_1, Q_2, Q_3 : débit latéraux ponctuels ; Q_X : débit observé
- Transfert de Q_1 : atténuation non visible ($Q_X = Q_1$)
- Transfert de Q_2 et Q_3 : distinction non visible ($Q_X = TF(X, s)(Q_2 + Q_3)$)

3.3.7 Synthèse partielle

Fonctions de transfert simplifiées par une approche fréquentielle

Nous avons développé, dans ces deux premières parties, un modèle du transfert de débit dans un bief. Nous avons suivi une approche fréquentielle qui a permis d'établir plusieurs fonctions de transfert simplifiées (du type premier ordre plus retard) reliant le débit en tout point du bief au débit amont et aux débits latéraux. Pour arriver à ces résultats, les hypothèses suivantes ont été faites :

- Écoulement monodimensionnel à surface libre, décrit par les équations de Saint-Venant
- Géométrie du bief uniforme, prismatique trapézoïdale
- Linéarisation des équations (petites variations autour d'un régime de référence)
- Approximation basses fréquences par la méthode des moments
- Débit latéral ponctuel ou uniformément distribué sur une portion du bief

L'intérêt de cette approche est multiple :

- Modèle simple à peu de paramètres, adapté aux outils de l'automatique
- Possibilité de pré-calage des paramètres à partir de l'estimation d'un bief équivalent
- Possibilité d'analyse et d'interprétation des résultats

- Description des fonctions de transfert de chaque débit (amont ou latéral) à partir d'un nombre réduit de paramètres

Le modèle obtenu a été validée sur des cas théoriques, à l'aide du logiciel SIC qui résout numériquement les équations de Saint-Venant complètes. Plusieurs applications sur des cas réels seront présentées aux chapitres 4 et 5.

Influence des ouvrages en travers

Dans la partie 3.2.3, nous avons proposé une approche permettant de prendre en compte la condition à la limite aval, et notamment l'effet de *feedback* dont l'influence sur l'écoulement a été mise en évidence par Strelkoff *et al.* (1998). Cette approche utilise l'équation d'ouvrage linéarisée ainsi qu'une approximation de la courbe de remous proposée par Litrico et Fromion (2004a). Elle permet d'étudier analytiquement les effets de l'ouvrage sur l'écoulement en un effet statique dit *backwater*, et un effet dynamique dit *feedback*. Une approche simple a également été proposée pour rechercher un ouvrage aval équivalent lorsque plusieurs ouvrages sont présents le long du bief.

Toutefois, cette approche nécessite une connaissance approfondie du système (topographie du bief, géométrie des ouvrages), ce qui limite son utilisation essentiellement aux canaux d'irrigation. Par conséquent, nous avons fait le choix pour la suite de négliger les effets de la condition à la limite aval en supposant le bief semi-infini, hypothèse classique des modèles hydrauliques simplifiés (tels que le modèle d'Hayami).

Un modèle de transfert à 2 paramètres

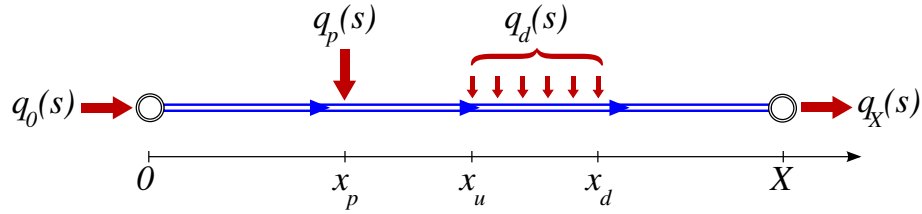
L'hypothèse d'un bief semi-infini a permis de réduire le nombre de paramètres décrivant la dynamique de transfert à trois paramètres adimensionnels : le nombre de Froude F , un paramètre κ relatif à la forme de la section, et un paramètre χ relatif à la longueur du bief. Ces trois paramètres décrivent à la fois le transfert d'un débit amont et celui des débits latéraux.

L'approximation basses fréquences a permis de relier ces trois paramètres adimensionnels aux paramètres des fonctions de transfert simplifiées des différents débits (amont et latéraux). Nous avons ainsi pu montrer que la dynamique de transfert de débit pouvait être décrite par seulement deux paramètres (τ_0 et K_0) correspondant au transfert d'un débit amont sur toute la longueur du bief, à condition de connaître la localisation des débits latéraux.

L'encart suivant présente le modèle LLR obtenu, ainsi que les notations utilisées par la suite, lors du couplage avec un modèle hydrologique.

Le modèle LLR

- Modèle simplifié à base physique du transfert de débit dans un bief
- Débit amont q_0 et débits latéraux ponctuels q_p ou distribués q_d pris en compte indépendamment pour la reconstitution du débit aval q_X
- Modèle à deux paramètres (τ_0, K_0)



$$q_X(s) = TF_0(s)q_0(s) + TF_p(x_p, s)q_p(s) + TF_d(x_u, x_d, s)q_d(s)$$

$$TF_0(s) = \frac{e^{-\tau_0 s}}{1+K_0 s}$$

$$TF_p(x_p, s) = \frac{e^{-\tau(X-x_p)s}}{1+K(X-x_p)s}$$

$$TF_d(x_u, x_d, s) = \frac{1}{1+K_d(x_d-x_u)s} \frac{e^{-\tau(X-x_d)s}}{1+K(X-x_d)s}$$

$$\begin{cases} K(x) &= \sqrt{\frac{x}{X}} K_0 \\ \tau(x) &= \frac{x}{X} (\tau_0 + K_0) - \sqrt{\frac{x}{X}} K_0 \\ K_d(x) &= \frac{x}{X} \frac{\tau_0 + K_0}{2} \end{cases}$$

3.4 Stratégie de couplage hydraulique-hydrologie

La partie 3.1 présente la structure du modèle intégré retenue dans cette thèse. Les deux principaux compartiments de ce modèle représentent les phénomènes hydrauliques et hydrologiques respectivement. Le premier a fait l'objet d'une étude particulière, présentée dans les parties 3.2 et 3.3, car les modèles existants ne remplissent pas toutes les conditions nécessaires dans notre contexte, à savoir applicabilité en temps réel, adaptabilité aux outils de l'automatique et intégration des débits intermédiaires.

Dans cette partie, nous précisons le choix du modèle hydrologique utilisé et détaillons la stratégie de couplage avec le modèle hydraulique développé précédemment.

3.4.1 Choix d'un modèle hydrologique

On dit souvent en hydrologie qu'il existe autant de modèles que de modélisateurs. Cette diversité vient en partie du fait que l'hydrologie couvre un large éventail de phénomènes complexes liés au cycle de l'eau sur la partie continentale. Aussi, chaque modèle tente d'appréhender les phénomènes hydrologiques prédominants pour un objectif donné. Quelques auteurs proposent des revues des différents modèles hydrologiques existants (Anderson et Burt, 1985; Shaw, 1994; Singh, 1995; Beven, 2000).

Parmi les modèles adaptés à la gestion opérationnelle, il existe des modèles physiques distribués, comme par exemple le modèle MARINE (Estupina-Borrell *et al.*, 2006). Ce type de modèle permet de prendre en compte la variabilité spatiale de la pluie, facteur déterminant lors de la formation des crues éclair, mais nécessite une mise en œuvre complexe et un volume important de données à traiter. On trouve également des modèles semi-distribués avec une approche conceptuelle pour la transformation de la pluie en débit couplée à un module hydraulique de propagation du débit dans les cours d'eau. Ce dernier peut être obtenu soit par une résolution numérique des équations de l'hydraulique (par exemple le modèle MIKE11 (Havnø *et al.*, 1995)), soit par une approche conceptuelle ou métrique (modèles DBM (*data-based mechanistic*), Young (2002); Romanowicz *et al.* (2006)).

Ces différents modèles peuvent être utilisés avec des algorithmes d'assimilation de données, et peuvent donner de bons résultats pour la prévision des crues. Néanmoins, dans le contexte de gestion des étiages, il restent peu adaptés à la synthèse de contrôleurs pour la commande automatique des vannes.

Comme nous l'avons précisé en 2.1.4, nous cherchons à établir un modèle intégré semi-distribué adapté à la régulation des cours d'eau. Le modèle hydraulique présenté précédemment a été construit sous ces contraintes. En outre, pour le contexte de gestion opérationnel considéré (crue ou étiage), on cherche à représenter le débit uniquement à l'exutoire du bassin intermédiaire. Une approche globale pour le module hydrologique paraît donc plus adaptée, notamment par le faible volume de données à traiter.

Perrin (2000) présente une analyse comparative des modèles pluie-débit globaux existants. Parmi ceux-ci, les approches de type GR, développées au Cemagref, semblent particulièrement intéressantes car elles possèdent un nombre réduit de paramètres (de 2 à 5 selon le modèle). En outre

leur robustesse a pu être éprouvée sur un grand nombre de bassins versants français (Mathevet, 2005; Le Moine, 2008; Lerat, 2009). De manière générale, les modèles GR distinguent trois types de transferts : la production de la pluie nette (après interception par les plantes et ruissellement jusqu'aux cours d'eau), les transferts superficiels (routage) et les transferts en nappe. La figure 3.34 présente le schéma hydrologique général de ces modèles.

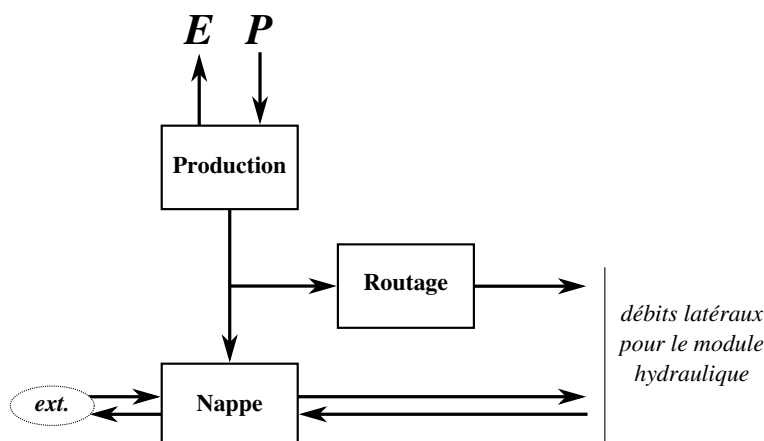


FIGURE 3.34 – Schéma général des transferts hydrologiques des modèles de type GR

Enfin, Tangara (2005) propose une version améliorée avec une méthode d'assimilation de données directement intégrée dans la structure du modèle, ce qui a abouti au modèle GR3P à trois paramètres adapté à la prévision des crues. Ce modèle, qui fonctionne au pas de temps horaire, nous servira de base pour la synthèse d'un modèle couplé hydrologie-hydraulique. La structure de ce modèle est présentée sur la figure 3.35. Les trois paramètres à caler sont :

- un coefficient multiplicatif IGF représentant les pertes ou gains par les échanges avec la nappe,
- la largeur de l'hydrogramme unitaire X ,
- la capacité du réservoir de routage R (en mm).

Pour notre approche, nous avons suivi les recommandations de Lerat (2009) en supprimant l'hydrogramme unitaire, et nous avons préféré ajouter un paramètre S traduisant la capacité du réservoir de production (en mm). Ce dernier paramètre, présent dans la plupart des modèles de type GR, a été fixé à la valeur de 350 mm pour le modèle GR3P.

3.4.2 Le cas de la nappe

Dans le cas du modèle GR3P présenté ci-dessus, les échanges avec la nappe sont représentés par le coefficient multiplicatif IGF . Ce coefficient peut être inférieur à 1 lorsqu'une partie de la pluie nette (issue du réservoir de production) est infiltrée dans la nappe et ne se retrouve pas sous forme de débit à l'exutoire, ou supérieur à 1 dans le cas où la nappe reçoit un débit des bassins voisins, débit ensuite injecté dans le cours d'eau principal. Cette fonction d'échange représente donc la double flèche entre la nappe et les bassins voisins sur la figure 3.1 présentée à la fin du chapitre 2.

Par ailleurs, les échanges de la rivière vers la nappe ne sont pas représentés dans notre modèle, ce qui correspond à l'hypothèse selon laquelle l'influence la plus importante de la nappe est sa

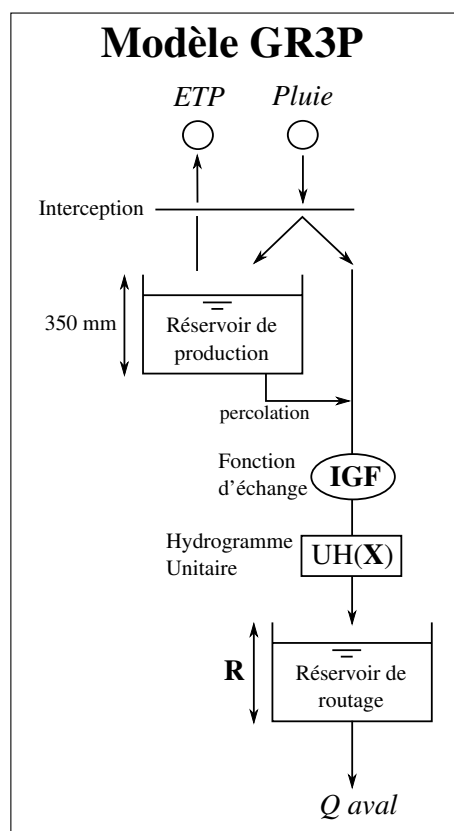


FIGURE 3.35 – Schéma de fonctionnement du modèle GR3P

réaction à la pluie. Cette hypothèse peut être valide dans le cas des crues, mais constitue une limitation importante en période d'étiage. En effet, lorsque la nappe a un niveau bas, la rivière tend à lui fournir un débit potentiellement non négligeable. Les échanges entre la nappe et la rivière sont soumis à des effets de seuil importants difficiles à prendre en compte dans le modèle linéaire proposé pour le module hydraulique.

3.4.3 Découpage spatial du bassin intermédiaire

Le modèle global GR3P traduit la transformation de la pluie sur le bassin intermédiaire en débit à l'exutoire. Pour intégrer cette composante au module hydraulique qui permet de propager le débit amont jusqu'à l'aval, nous suivons l'approche développée par Lerat (2009) à partir des modèles GR4H pour l'hydrologie et Hayami pour l'hydraulique. L'auteur propose un découpage du bassin intermédiaire basé sur la courbe des surfaces drainées par le cours d'eau principal. Cette courbe permet notamment de mettre en évidence deux types d'apports du bassin vers le cours d'eau : apports ponctuels correspondant aux surfaces drainées par les affluents importants et apports uniformément répartis (diffus) correspondant aux surfaces non drainées par ces affluents (figure 3.36).

Dans ses travaux, Lerat (2009) étudie, sur un grand nombre de bassins versants, différentes configurations de répartition entre apports ponctuels et apports diffus. Il en ressort qu'un nombre trop important d'apports ponctuels ou diffus peut dégrader la qualité des résultats, la configuration

optimale étant obtenue avec deux apports diffus et deux apports ponctuels. Cette conclusion traduit une tendance moyenne sur un grand nombre de bassins versants. Nous testerons différentes configurations dans les applications ultérieures.

Il est possible d'appliquer un modèle hydrologique sur chaque sous-bassin latéral (relatif à un apport ponctuel ou diffus). Cette solution requerrait un jeu de paramètres hydrologiques (S , R et IGF) pour chaque sous-bassin, ce qui pourrait poser des problèmes d'identifiabilité liés à une sur-paramétrisation. Or, les travaux de Lerat (2009) ont également montré que cette solution n'apportait pas d'amélioration significative, de même qu'utiliser des données de pluies calculées pour chaque sous-bassin.

On supposera donc que tous les sous-bassins ont le même comportement hydrologique (mêmes paramètres) et que la pluie tombe uniformément sur tout le bassin intermédiaire. Le débit issu du modèle hydrologique est alors réparti entre les apports ponctuels et les apports diffus en fonction des surfaces correspondantes, puis injecté dans le module hydraulique sous forme de débit latéral ponctuel ou uniformément réparti, respectivement.

Dans les applications proposées dans les chapitres 4 et 5, la courbe des surfaces drainées sera calculée à partir d'un modèle numérique de terrain (MNT). La répartition des débits latéraux sera donc connue à l'avance.

3.4.4 Le modèle intégré

Le couplage proposé permet de mettre en œuvre un modèle intégré hydraulique-hydrologie semi-distribué et semi-linéaire. En outre, nous proposons de linéariser le réservoir de routage du module

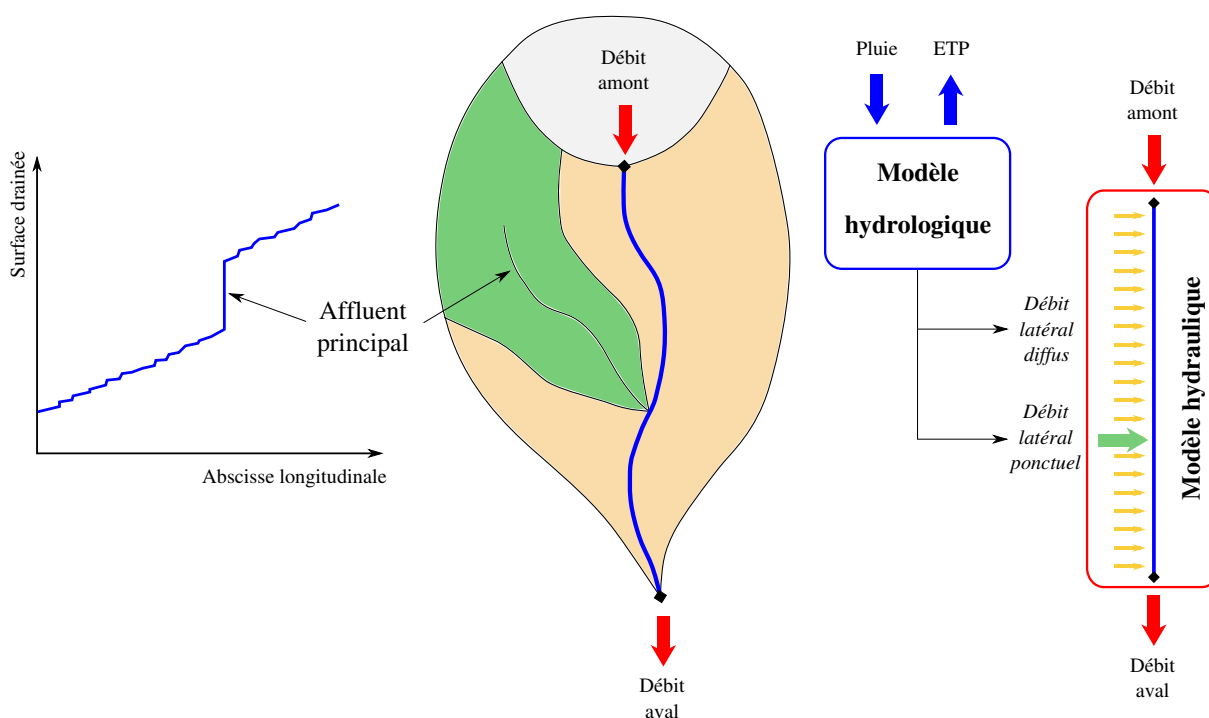


FIGURE 3.36 – Principe du découpage spatial du bassin intermédiaire (exemple avec un affluent principal)

hydrologique, ce qui nous permettra de profiter des outils classiques de l'automatique linéaire (voir chapitre 5) à la fois sur le module hydraulique et sur une partie du module hydrologique. Cette approche reprend l'idée initialement proposée par Young (1974) d'une partie non linéaire pour la production de pluie et une partie linéaire pour le transfert.

On obtient donc une partie non-linéaire (GRK) traduisant la production de la pluie nette et les échanges avec la nappe, et une partie linéaire (LRK) traduisant le routage sur le bassin intermédiaire et dans le cours d'eau principal. Même si le routage hydrologique est transféré dans le module LRK, on appellera GRK le module hydrologique et LRK le module hydraulique.

Le modèle intégré, que l'on appellera TGR, possède finalement 5 paramètres à caler lors de l'étape d'identification (chapitre 4) : 2 pour le module GRK (S et IGF) et 3 pour le module LRK (τ_0 , K_0 et K_R).

La figure 3.37 présente le schéma fonctionnel du modèle TGR pour un unique bassin intermédiaire. Le cas de plusieurs bassins successifs est présenté sur la figure 3.38.

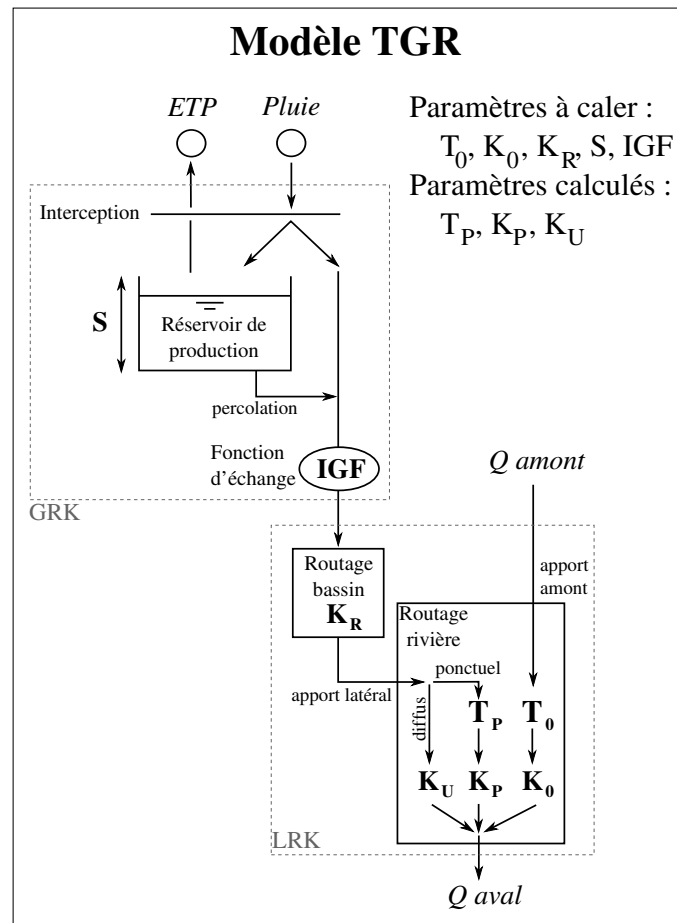
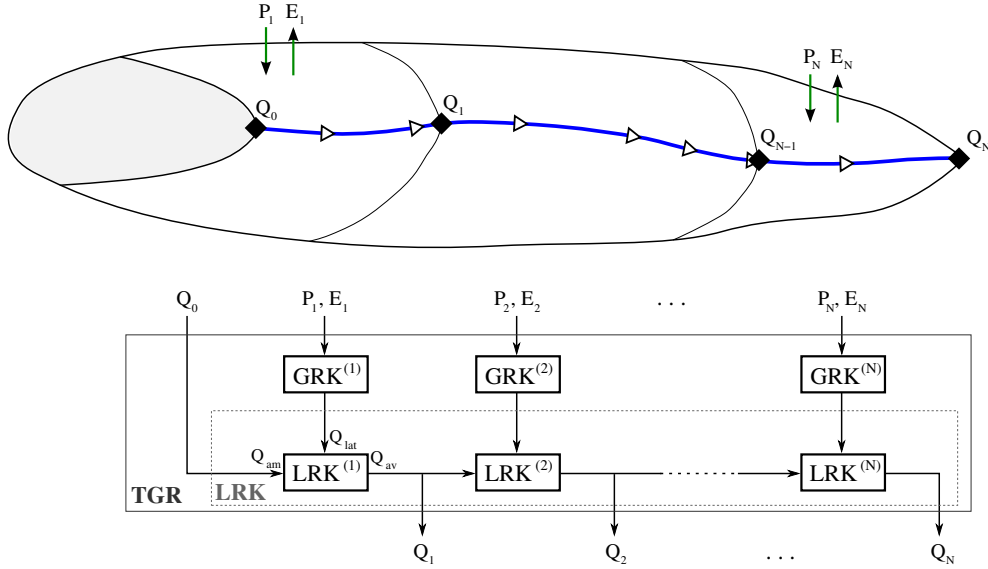


FIGURE 3.37 – Schéma fonctionnel du modèle TGR pour un unique bassin intermédiaire


 FIGURE 3.38 – Schéma fonctionnel du modèle TGR pour N sous-bassins versants

3.5 Annexe : Approximation de Taylor de la fonction de transfert du modèle LBLR

Le modèle LBLR permet de représenter, à travers la fonction de transfert TF_0 , la propagation d'un débit amont dans un bief possédant un ouvrage à l'aval. Cet ouvrage a deux effets sur la dynamique : l'effet *backwater* dû à la courbe de remous qu'il induit et caractérisé par la hauteur d'eau aval Y_X , et l'effet *feedback* caractérisé par le coefficient de *feedback* k obtenu à partir de l'équation d'ouvrage. La fonction de transfert TF_0 , décrite par les équations (3.26) à (3.29), permet de prendre en compte ces deux effets. Cette fonction de transfert est approchée par une fonction de type premier ordre avec retard grâce à la méthode des moments. Pour ce faire, l'approximation de Taylor de TF_0 est calculée. Nous présentons ici le détail de ce calcul. L'approximation de la courbe de remous conduit à scinder le bief en deux sous-bief. Les variables relatives au sous-bief amont seront notées avec l'indice 1, celles relatives au sous-bief aval avec l'indice 2.

Les valeurs propres, décrites par les équations (3.16), sont définies pour chaque sous-bief. Leur approximation de Taylor conduit à ($i = 1..2$) :

$$\begin{aligned}\lambda_{1i} &= (b_i - c'_i)s - d'_i s^2 + o(s^2) \\ \lambda_{2i} &= 2a_i + (b_i + c'_i)s + d'_i s^2 + o(s^2)\end{aligned}\tag{3.77}$$

où $c'_i = \frac{c_i}{2a_i}$ et $d'_i = \frac{1}{2a_i} \left(d_i - \frac{c_i^2}{4a_i^2} \right)$.

Les approximations de Taylor des intermédiaires de calcul k_1 , k_2 , ρ_1 et ρ_2 (équations (3.27) et

(3.28)) sont données par :

$$\begin{aligned}
 k_2 &= k \\
 \rho_2 &= B_{\rho 2}s + C_{\rho 2}s^2 + o(s^2) \\
 k_1 &= A_{k1} + B_{k1}s + o(s) \\
 \rho_1 &= B_{\rho 1}s + C_{\rho 1}s^2 + o(s^2)
 \end{aligned} \tag{3.78}$$

avec

$$\begin{aligned}
 B_{\rho 2} &= \frac{k(b_2 - c'_2) + T_2}{2ka_2} \\
 C_{\rho 2} &= -\frac{1}{2ka_2} \left[kd'_2 + \frac{1}{2ka_2} (k(b_2 - c'_2) + T_2)(k(b_2 + c'_2) + T_2) \right] \\
 A_{k1} &= \frac{-T_2}{b_2 - c'_2 - 2a_2 B_{\rho 2} e^{-2a_2 X_2}} \\
 B_{k1} &= \frac{T_2}{b_2 - c'_2 - 2a_2 B_{\rho 2} e^{-2a_2 X_2}} \left[B_{\rho 2} e^{-2a_2 X_2} - \frac{d'_2 + ((b_2 + c'_2 - 4a_2 c'_2 X_2) B_{\rho 2} + 2a_2 C_{\rho 2}) e^{-2a_2 X_2}}{b_2 - c'_2 - 2a_2 B_{\rho 2} e^{-2a_2 X_2}} \right] \\
 B_{\rho 1} &= \frac{(b_1 - c'_1) A_{k1} + T_1}{2a_1 A_{k1}} \\
 C_{\rho 1} &= \frac{1}{2a_1 A_{k1}} \left[(b_1 - c'_1) B_{k1} - d'_1 A_{k1} - (2a_1 B_{k1} + (b_1 + c'_1) A_{k1} + T_1) \frac{(b_1 - c'_1) A_{k1} + T_1}{2a_1 A_{k1}} \right]
 \end{aligned}$$

On définit pour chaque sous-bief ($i = 1..2$) la fonction $Z_i(x, s)$ comme suit :

$$Z_i(x, s) = \frac{1 - \rho_i e^{(\lambda_{1i} - \lambda_{2i})(X_i - x)}}{1 - \rho_i e^{(\lambda_{1i} - \lambda_{2i})X_i}} = A_{Zi}(x) + B_{Zi}(x)s + C_{Zi}(x)s^2 + o(s^2) \tag{3.79}$$

avec

$$\begin{aligned}
 A_{Zi}(x) &= 1 \\
 B_{Zi}(x) &= B_{\rho i} (1 - e^{2a_i x}) e^{-2a_i X_i} \\
 C_{Zi}(x) &= (C_{\rho i} + B_{\rho i}^2 e^{-2a_i X_i}) (1 - e^{2a_i x}) e^{-2a_i X_i} - 2B_{\rho i} c'_i (X_i - (X_i - x) e^{2a_i x}) e^{-2a_i X_i}
 \end{aligned}$$

On en déduit, pour les fonctions de transfert TF_i relative à chaque sous-bief :

$$TF_i(x, s) = Z_i(x, s) e^{\lambda_{1i} x} = A_i(x) + B_i(x)s + C_i(x)s^2 + o(s^2) \tag{3.80}$$

avec

$$\begin{aligned}
 A_i(x) &= 1 \\
 B_i(x) &= (b_i - c'_i)x + B_{Zi}(x, X_i) \\
 C_i(x) &= (b_i - c'_i)^2 \frac{x^2}{2} - d'_i x + (b_i - c'_i)x B_{Zi}(x, X_i) + C_{Zi}(x, X_i)
 \end{aligned}$$

On aboutit finalement à l'approximation de Taylor de la fonction de transfert TF_0 du bief entier :

$$TF_0(x, s) = A_0(x) + B_0(x)s + C_0(x)s^2 + o(s^2) \tag{3.81}$$

avec

$$\begin{aligned} \text{si } x \leq X_1 \quad A_0(x) &= 1 \\ B_0(x) &= B_1(x) \\ C_0(x) &= C_1(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{si } x > X_1 \quad A_0(x) &= 1 \\ B_0(x) &= B_1(X_1) + B_2(x - X_1) \\ C_0(x) &= C_1(X_1) + B_1(X_1)B_2(x - X_1) + C_2(x - X_1) \end{aligned}$$

Les coefficients $A_0(x)$, $B_0(x)$ et $C_0(x)$ sont obtenus analytiquement à partir des caractéristiques physiques du bief et du régime de référence, à savoir les caractéristiques géométriques (X , B , m , S_b), la rugosité (n), la condition à la limite aval (Y_X , k) et le débit de linéarisation (Q).

Chapitre 4

Identification

Dans le chapitre précédent, nous avons proposé une méthodologie de synthèse d'un modèle intégré représentant le transfert de débit dans un cours d'eau en prenant en compte les débits latéraux (tels que les apports naturels, les prélèvements pour l'irrigation ou les échanges avec la nappe). Un modèle couplant hydraulique et hydrologie a alors été proposé en fin de chapitre. Nous nous intéressons à présent à l'étape d'identification des paramètres du modèle.

4.1 Cadre théorique

4.1.1 Identifiabilité

La question de l'identifiabilité, déjà évoquée dans le chapitre 2, traduit le fait que deux jeux de paramètres différents peuvent produire le même modèle. Plus précisément, un modèle \mathcal{M} décrit par un jeu de paramètres θ est dit identifiable si la fonction $\theta \rightarrow \mathcal{M}$ est injective, c'est-à-dire si : $\mathcal{M}(\theta_1) \equiv \mathcal{M}(\theta_2) \Rightarrow \theta_1 = \theta_2$.

Le problème de l'identifiabilité est souvent lié à une sur-paramétrisation du modèle, c'est-à-dire lorsque le modèle pourrait être décrit par un nombre moindre de paramètres, d'où l'importance, lors de la phase de conception, de réduire au maximum le nombre de paramètres décrivant le modèle. Dans ce but, l'approche adimensionnelle permet d'introduire des nombres caractéristiques décrivant de façon minimale les équations de la dynamique (voir la synthèse du modèle LLR présentée en 3.2.4 et l'application en 4.2.1).

En pratique, il est difficile d'analyser directement l'identifiabilité d'un modèle car elle dépend aussi des données utilisées, qui peuvent être plus ou moins riches en information. Ainsi, un modèle peut être sur-paramétré lorsque certains de ses paramètres correspondent à des phénomènes non décrits par les données. Par exemple, les paramètres traduisant la transformation de la pluie en débit perdent tout leur sens si les données couvrent une période sans pluie. A l'inverse, lorsque le débit amont est quasi-nul, les paramètres du transfert de débit amont deviennent inutiles.

Le choix des phénomènes à représenter par le modèle est donc crucial. Pour les approches à base physique, l'introduction de nombres adimensionnels peut permettre de déterminer les phénomènes prédominants, mais cette démarche requiert une connaissance du système pas toujours

disponible. On peut alors avoir recours à une analyse de sensibilité du modèle, qui permet d'étudier, pour une entrée donnée, l'influence des différents paramètres sur la sortie.

4.1.2 Sensibilité

L'intérêt principal de l'analyse de sensibilité est qu'elle permet d'extraire les paramètres les moins influents, à partir de résultats statistiques, quantitatifs ou graphiques. Fixer ces paramètres à des valeurs déterminées *a priori* permet alors de réduire les problèmes d'identifiabilité sans trop dégrader la qualité du modèle.

L'analyse de sensibilité a fait l'objet de nombreuses études depuis une quinzaine d'années. Saltelli *et al.* (2000) et Frey et Patil (2002) proposent une revue des différentes méthodes développées dans le contexte de la modélisation hydrologique. Parmi les plus utilisées, on peut citer : *Regional Sensitivity Analysis* (RSA) (Young, 1978; Hornberger et Spear, 1981), les méthodes basées sur la variance (ANOVA) (Neter *et al.*, 1996; Saltelli *et al.*, 2000; Mokhtari et Frey, 2005) et la méthode de Sobol (Sobol', 1993). Ces méthodes, parfois assez lourdes à implémenter, sont généralement appliquées aux modèles hydrologiques possédant un nombre conséquent de paramètres. Il s'agit le plus souvent de modèles distribués ou semi-distribués. Tang *et al.* (2007) comparent plusieurs méthodes d'analyse de sensibilité avec un modèle hydrologique couplé SNOW-17 et SAC-SMA (*Sacramento Soil Moisture Accounting*) (Burnash, 1995). van Werkhoven *et al.* (2007) proposent également une étude de sensibilité sur le modèle SAC-SMA afin d'en réduire le nombre de paramètres pour différents cas d'études. Pappenberger *et al.* (2008) exploitent différentes méthodes avec le modèle HEC-RAS. van Griensven *et al.* (2006) et Lenhart *et al.* (2002) étudient à travers diverses méthodes la sensibilité du modèle hydrologique SWAT (*Soil and Water Assessment Tool*, Arnold *et al.* (1998)).

Le problème de l'identifiabilité a également été abordé par Beven (2006) à travers le concept d'équifinalité (Beven, 1993) et la méthode GLUE (*Generalised Likelihood Uncertainty Estimation*) (Beven et Binley, 1992) basée sur l'analyse de sensibilité et les outils statistiques. Ce concept permet de proposer, pour un cas d'étude donné, non pas un jeu de paramètres, mais un ensemble de jeux de paramètres garantissant un critère défini. La méthode GLUE a été notamment utilisée par Roux et Dartus (2006) pour estimer les paramètres hydrauliques d'un modèle distribué numérique.

Dans cette thèse, nous avons fait le choix plus à l'amont d'établir un modèle intégré possédant peu de paramètres (grâce entre autres à l'approche adimensionnelle), pour des raisons d'applicabilité aux outils de l'automatique autant que pour limiter les problèmes d'identifiabilité. Les méthodes d'analyse de sensibilité exposées ci-dessus nous paraissent donc peu adaptées à notre cas. L'identifiabilité du modèle sera vérifiée à travers les diverses applications proposées dans ce chapitre et le suivant.

4.1.3 Identification

Objectif de l'identification

L'étape d'identification des paramètres d'un modèle consiste à déterminer le jeu de paramètres permettant de représenter au mieux les phénomènes modélisés. L'identification permet d'adapter le modèle à chaque cas d'étude, en supposant que les phénomènes prédominants sont pris en compte par le modèle, et que les caractéristiques des systèmes étudiés peuvent être représentées par les paramètres du modèle.

En outre, l'étape d'identification requiert l'intervention d'un critère de qualité permettant de choisir le jeu de paramètres le mieux adapté. Ce critère traduit généralement l'écart entre les données simulées et les données mesurées. La procédure d'identification vise alors à trouver le jeu de paramètres qui minimise ce critère.

Les méthodes d'identification pour un système dynamique sont très nombreuses dans la littérature (Landau, 1993; Ljung, 1999). Pour les différentes applications, nous utiliserons la méthode classique de minimisation d'un critère, qui fonctionne assez bien avec les modèles développés dans cette thèse. Toutefois, nous évoquons dans la suite différentes méthodes alternatives, telles que l'identification fréquentielle, l'identification séquentielle ou l'identification itérative.

Identification temporelle/fréquentielle

Dans le chapitre 3, nous avons établi un modèle de transfert de débit basé sur une approche fréquentielle. Afin de revenir dans le domaine temporel, nous avons dû approcher la fonction de transfert obtenue par une fonction de transfert simplifiée du type premier ordre avec retard (de paramètres τ , K). Cette dernière correspond, dans le domaine temporel, à une équation différentielle à retard (DDE : *Delay Differential Equation*) que l'on peut résoudre numériquement grâce à un algorithme du type Runge-Kutta d'ordre 4. Lors de la procédure d'identification, le calcul du critère se fera par la résolution de cette équation différentielle et le calcul de l'écart entre le résultat et la mesure.

Dans certains cas, lorsque les grandeurs étudiées peuvent être correctement représentées par un nombre restreint de modes fréquents, il est possible d'améliorer la procédure d'identification en calculant un critère directement en fréquentiel (Gillberg et Ljung, 2009; Ljung, 2004). Le cas particulier de la rivière Sacramento (voir ci-après) présente une dynamique fortement influencée par les phénomènes de marée. Cette application nous permettra de présenter une méthode alternative pour identifier le transfert en cours d'eau à partir de la décomposition modale des débits et des hauteurs d'eau, obtenues par la transformée de Fourier (ou *Fast Fourier Transform*, Brigham (1988)). Dans ce contexte particulier, ces grandeurs sont caractérisées par un nombre réduit de modes fréquents. La sortie du modèle peut être calculée également en fréquentiel à travers la fonction de transfert qu'il n'est plus nécessaire d'approcher par un premier ordre avec retard. Enfin, le critère est évalué à partir de l'écart entre les décompositions spectrales simulées et mesurées. Les détails de calcul seront présentés en 4.2.1.

Cette méthode permet notamment de diminuer considérablement les temps de calcul. Elle ne sera cependant pas utilisée avec le modèle intégré car on ne dispose pas de fonction de transfert

fréquentielle linéaire traduisant les phénomènes hydrologiques. Ceci paraît difficilement envisageable car ces phénomènes sont fortement non linéaires, et l'hypothèse de linéarité permet le principe de superposition à la base de l'analyse spectrale (superposition d'ondes).

Identification séquentielle

Pour réduire les problèmes d'identifiabilité, on pourrait envisager d'identifier les phénomènes successivement en essayant de les isoler à travers le choix de différentes périodes d'identification. Par exemple, s'il est possible d'extraire des données une période sans apports dus aux pluies mais présentant des variations significatives du débit amont (ce que nous pourrions appeler « crue hydraulique »), nous pourrions alors identifier les paramètres du sous-modèle hydraulique seul (Moussa et Bocquillon, 1996). Une fois ceux-ci calés, il ne serait pas nécessaire d'isoler de la même manière les phénomènes hydrologiques, puisque l'on pourrait fixer les paramètres hydrauliques lors de l'identification des paramètres hydrologiques.

En pratique, il est très difficile d'isoler les phénomènes hydraulique et hydrologique. Pour observer une crue hydraulique, il faudrait pouvoir trouver une période présentant de fortes précipitations sur le bassin versant à l'amont du bief considéré, et simultanément des précipitations très faibles sur le bassin versant étudié. Ce phénomène de précipitations très localisées n'a pas pu être détecté avec les données utilisées pour les différentes applications. Cette méthode ne sera donc pas utilisée dans la suite.

Identification itérative

Une autre méthode, utilisée notamment par Litrico (1999), permet de diminuer le nombre de paramètres à identifier simultanément, réduisant ainsi les problèmes d'identifiabilité. Il s'agit d'identifier chaque sous-modèle indépendamment de manière itérative. A chaque itération, les paramètres d'un sous-modèle sont identifiés tandis que les autres sont fixés à la valeur obtenue à l'itération précédente. A chaque itération, l'identification porte sur un nombre réduit de paramètres et la convergence vers l'optimum est donc plus rapide et plus robuste. Toutefois la méthode requiert parfois un nombre conséquent d'itérations, pour converger finalement vers le jeu de paramètres que l'on obtient en identifiant directement le modèle complet. Cette méthode a été testée mais ne sera pas présentée car elle n'apporte pas d'avantages significatifs.

4.1.4 L'identification dans la thèse

Procédure d'identification retenue

Dans la suite, l'identification des paramètres se fera par la minimisation d'un critère traduisant l'écart entre les mesures et les résultats de simulation. La recherche d'un minimum global (dans l'espace des paramètres) permet de s'assurer que le jeu de paramètres obtenu est bien optimal. La convergence vers cet optimum se fait à partir d'un point initial, mais n'est toutefois pas garantie, notamment lorsqu'il existe plusieurs minima locaux (cas des modèles sur-paramétrés). Le choix du point initial devient alors crucial.

Pour contourner ce problème, nous utiliserons une méthode développée par Mathevet (2005) et utilisée notamment par Lerat (2009) avec un modèle couplé hydrologie-hydraulique. Cette méthode se décompose en trois étapes.

1. L'espace des paramètres est tout d'abord échantillonné. La grille d'échantillonnage est définie par des valeurs réalistes des différents paramètres. Compte tenu des dimensions des biefs étudiés, les valeurs de 1 h et 10 h ont été retenues pour les paramètres hydrauliques τ_0 et K_0 . Pour les paramètres hydrologiques, les valeurs utilisées ont été déterminées à partir des résultats d'identification sur un grand nombre de bassins versants (Le Moine, 2008). Nous retiendrons les valeurs de 10 h et 100 h pour le paramètre K_R , 100 mm, 400 mm et 1000 mm pour le paramètre S , et 0.5, 1 et 1.5 pour le paramètre IGF .
2. Le critère est ensuite calculé pour chaque échantillon.
3. L'échantillon ayant obtenu le meilleur score est retenu pour servir de point de départ pour la procédure de minimisation du critère.

L'algorithme de Levenberg-Marquardt (Levenberg, 1944) sera ensuite utilisé pour la recherche du jeu de paramètres qui minimise le critère. Cet algorithme est codé sous le logiciel de calcul Scilab¹ par la fonction `lsqrsolve`. Dans les différentes applications proposées dans la suite, l'algorithme a systématiquement convergé vers un minimum que nous supposons global.

Enfin, la période d'identification devra être suffisamment longue pour pouvoir représenter les phénomènes modélisés dans leur ensemble. Notons que ces phénomènes mettent en jeu des temps de transfert différents. Ainsi, un unique événement peut permettre d'identifier un modèle hydraulique, alors que l'on considère généralement que plusieurs années sont nécessaires pour identifier un modèle hydrologique.

Choix d'un critère

Le choix du critère est primordial pour s'assurer du bon fonctionnement du modèle. En effet, un modèle fonctionne mieux si les objectifs de modélisation sont pris en compte lors de l'identification à travers le critère retenu (Oudin et al, 2006). Cela signifie par exemple que le critère sera différent pour une étude de crue et pour une étude des étiages, bien que le modèle utilisé puisse être le même dans les deux cas. Lors de l'étude des crues, le modèle doit assurer une bonne représentation des périodes de hautes eaux, contrairement à une étude des étiages qui se concentre essentiellement sur les périodes de basses eaux.

Les différentes applications proposées se placent dans des contextes variés. Aussi, différents critères seront utilisés. Néanmoins, ces critères sont tous basés sur le critère classique des moindres carrés, nommé RMSE (*Root Mean Square Error*). Ce critère permet de quantifier l'écart quadratique moyen entre une grandeur simulée et sa mesure. Il est défini par :

$$\text{RMSE} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{k=1}^N (y_{mes}(k) - y_{sim}(k))^2} \quad (4.1)$$

1. Le logiciel Scilab est développé à l'INRIA (www.scilab.org).

où N est le nombre de pas de temps, $y_{mes}(k)$ la grandeur mesurée au pas de temps k , et $y_{sim}(k)$ la grandeur simulée à ce même pas de temps. Le critère RMSE a tendance à donner plus d'importance aux valeurs élevées qu'aux valeurs faibles. Lors d'une étude hydrologique, des écarts relatifs similaires en hautes et basses eaux n'auront pas le même poids lors du calcul du critère. La minimisation de ce critère aura donc tendance à favoriser une bonne reproduction des crues. Afin de donner la même importance aux écarts relatifs de hautes et basses eaux lors de l'identification, il est possible d'appliquer une transformation sur les grandeurs évaluées. La transformation logarithmique, illustrée sur la figure 4.1, est souvent utilisée à cet effet. Le critère s'écrit alors :

$$\text{RMSE}_{\log} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{k=1}^N (\log y_{mes}(k) - \log y_{sim}(k))^2} \quad (4.2)$$

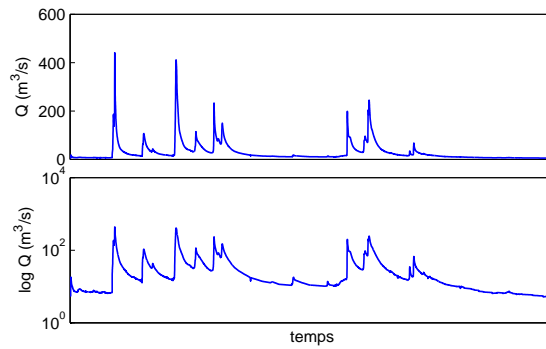


FIGURE 4.1 – Effets de la transformation $\log Q$

Le critère de Nash-Sutcliffe (Nash et Sutcliffe, 1970), défini par l'équation 4.3, permet de normaliser l'écart quadratique moyen et de fournir ainsi une information sur la qualité relative de la simulation. Ce critère, donné en pourcentage, est largement utilisé en hydraulique et en hydrologie.

$$\text{Nash} = 1 - \frac{\sum_{k=1}^N (y_{mes}(k) - y_{sim}(k))^2}{\sum_{k=1}^N (y_{mes}(k) - \overline{y_{mes}})^2} \quad (4.3)$$

où $\overline{y_{mes}}$ représente la valeur moyenne de y_{mes} .

Les critères RMSE, RMSE_{\log} et Nash seront ceux utilisés dans les différentes applications proposées. Pour le cas de Sacramento, l'identification étant effectuée dans le domaine fréquentiel, nous utiliserons un critère spécifique défini plus loin.

Validation

Pour les applications hydrologiques présentées dans la suite, l'étape d'identification se déroulera selon une procédure dite de « calage-contrôle croisé ». Cette méthode, développée par Klemes (1986), est aujourd'hui largement utilisée en hydrologie. Le principe repose sur un découpage de la période de données en deux sous-périodes P_1 et P_2 . L'identification est tout d'abord effectuée sur la période P_1 et validée sur la période P_2 . Le modèle est ensuite identifié sur la période

P_2 puis validé sur la période P_1 . Cette procédure permet notamment de vérifier la consistance des paramètres. Généralement, si les paramètres varient peu entre les deux identifications, les paramètres sont moyennés pour obtenir les valeurs retenues.

Dans certains cas, il est également possible de valider le jeu de paramètres identifié en utilisant d'autres types de données, comme le débit en un point intermédiaire par exemple (voir les travaux de Lerat (2009) et l'application sur le delta de Sacramento en 4.2.1). Enfin, dans le cas de la synthèse d'un contrôleur (voir l'application Gignac présentée en 4.2.2), la validation ne pourra se faire qu'en situation réelle en vérifiant que le débit observé correspond bien au débit désiré.

4.2 Applications

Dans cette partie sont présentées trois applications de la procédure d'identification. La première met en œuvre l'identification fréquentielle proposée précédemment sur un bief du delta de la rivière Sacramento. L'écoulement dans ce delta a la particularité d'être fortement influencé par la marée, mettant ainsi en évidence des modes fréquentiels particuliers. Le problème de l'identifiabilité sera également illustré dans cette application à travers une analyse de sensibilité. La deuxième application concerne un nouveau bief du canal de Gignac présenté au chapitre 3. L'identification d'un modèle de transfert permet dans ce cas la synthèse d'un contrôleur automatique en boucle ouverte, validé en situation réelle. Enfin, la dernière application propose d'identifier le modèle couplé TGR présenté dans le chapitre 3 afin d'en valider la structure. Les bassins du Tarn, de l'Aveyron et de la Loue serviront de support pour cette application. Chacune de ces applications concerne un système particulier (rivière, canal automatisé et bassin versant). Elles permettent ainsi d'explorer l'étape d'identification à travers des contextes variés.

4.2.1 Identification fréquentielle (Delta de Sacramento-San Joaquin)

Position du problème

Le Delta de Sacramento-San Joaquin en Californie est un réseau complexe de plus de 1150 km de rivières et canaux fortement influencés par la marée. Le bief considéré dans cette application concerne la rivière San Joaquin entre les stations nommées SJL et SJG sur la figure 4.2. Les données disponibles sont issues des bases de l'USGS (U.S. Geological Survey). Il s'agit des variations de débit et de hauteur d'eau aux stations amont et aval, respectivement SJL et SJG. Les variations de hauteur d'eau à la station intermédiaire BDT sont également disponibles. Les données couvrent la période du 16/11/2006 au 17/12/2006 à un pas de temps de 900 s (soit 15 min). Le bief sera considéré comme rectangulaire large.

Le problème consiste à identifier un modèle hydraulique sur ce bief. Le contexte du forçage de la marée apporte deux particularités au problème :

- les variables mesurées (débits et hauteurs d'eau) peuvent être caractérisées par des modes fréquentiels dominants,
- les conditions aux limites sont données par le débit amont $q_0(t)$ et la hauteur d'eau aval $y_X(t)$.

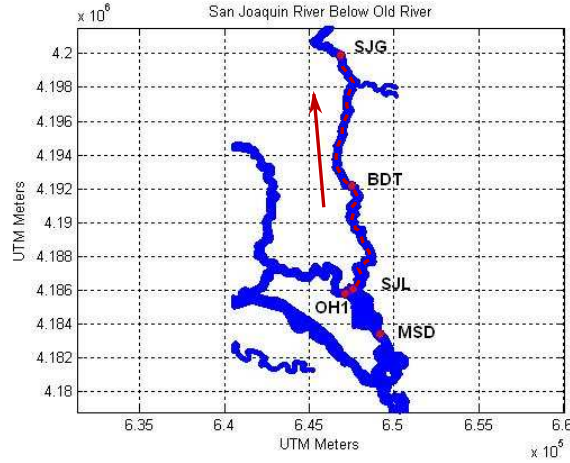


FIGURE 4.2 – Stations de mesure sur la rivière San Joaquin, Delta de Sacramento

Une modélisation par une approche fréquentielle est particulièrement adaptée du fait de la présence de modes fréquentiels dominants. Les signaux d'entrée et de sortie sont alors considérés dans l'espace fréquentiel, et reliés par une fonction de transfert déduite des équations de Saint-Venant transposées dans l'espace de Laplace. Cette démarche permet de comparer les signaux de sortie simulés et mesurés directement dans le domaine fréquentiel, ce qui présente deux avantages : on évite la transposition entre les domaines temporel et fréquentiel, ce qui diminue fortement les temps de calcul, et il n'est pas nécessaire d'approcher la fonction de transfert (par exemple par un premier ordre avec retard). Ces particularités permettent d'envisager une méthode d'identification fréquentielle, que nous présentons ici.

Dans ce problème, les variables d'entrée du modèle sont le débit amont $q_0(t)$ et la hauteur d'eau aval $y_X(t)$, et les variables de sortie sont le débit aval $q_X(t)$ et la hauteur d'eau amont $y_0(t)$. La hauteur d'eau à la station intermédiaire $y_{BDT}(t)$ sera utilisée à des fins de validation.

Modèle fréquentiel de Saint-Venant

La synthèse du modèle hydraulique repose sur la même méthodologie que celle présentée dans le chapitre 3, avec des conditions aux limites différentes. Les équations de Saint-Venant sont tout d'abord linéarisées autour d'un régime de référence *a priori* non uniforme, puis transposées dans le domaine fréquentiel par la transformée de Laplace. La non uniformité sera approchée par l'approximation de la courbe de remous développée dans la partie 3.2. Le régime de référence est alors défini par le débit de linéarisation Q , la largeur du bief B , la pente du fond S_b , le coefficient de Manning n et la hauteur d'eau aval Y_X .

On utilise la matrice $\Gamma(x, s)$, définie par l'équation (3.20) et reliant les débits et hauteurs d'eau en tout point du bief au débit et à la hauteur d'eau à l'amont :

$$\begin{pmatrix} q(x, s) \\ y(x, s) \end{pmatrix} = \Gamma(x, s) \begin{pmatrix} q_0(s) \\ y_0(s) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

On définit ensuite la matrice Entrée/Sortie $\mathcal{G} = (g_{ij})$ relative au problème posé :

$$\begin{pmatrix} q_X(s) \\ y_0(s) \end{pmatrix} = \mathcal{G}(X, s) \begin{pmatrix} q_0(s) \\ y_X(s) \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Pour un régime de référence uniforme, cette matrice est obtenue par simple recombinaison :

$$\begin{aligned} g_{11} &= \gamma_{11} - \frac{\gamma_{12}\gamma_{21}}{\gamma_{22}} & g_{12} &= \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{22}} \\ g_{21} &= -\frac{\gamma_{21}}{\gamma_{22}} & g_{22} &= \frac{1}{\gamma_{22}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Les fonctions g_{ij} et γ_{ij} sont calculées en (X, s) .

Pour un régime non uniforme, l'approximation de la courbe de remous permet de scinder le bief en deux sous-biefs dans lesquels le régime est considéré comme uniforme. On peut alors définir les matrices $\Gamma^{(1)}$ et $\Gamma^{(2)}$ relatives aux sous-biefs amont et aval respectivement. On en déduit les matrices $\mathcal{G}^{(1)}$ et $\mathcal{G}^{(2)}$ à partir des relations (4.6). La matrice \mathcal{G} relative au bief entier est obtenue par :

$$\begin{aligned} g_{11} &= \frac{g_{11}^{(1)} g_{11}^{(2)}}{1 - g_{12}^{(1)} g_{21}^{(2)}} & g_{12} &= g_{12}^{(2)} + g_{12}^{(1)} \frac{g_{11}^{(2)} g_{22}^{(2)}}{1 - g_{12}^{(1)} g_{21}^{(2)}} \\ g_{21} &= g_{21}^{(1)} + g_{21}^{(2)} \frac{g_{11}^{(1)} g_{22}^{(1)}}{1 - g_{12}^{(1)} g_{21}^{(2)}} & g_{22} &= \frac{g_{22}^{(1)} g_{22}^{(2)}}{1 - g_{12}^{(1)} g_{21}^{(2)}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Cette démarche fournit un modèle fréquentiel à base physique adapté au problème particulier de la rivière San Joaquin. Notons que les expressions des g_{ij} sont analytiques et ne font intervenir que les cinq paramètres (Q, B, Sb, n, Y_X) relatifs au régime de référence. Dans la suite, un jeu de paramètre donné sera noté $\theta = (Q, B, Sb, n, Y_X)$.

Une version adimensionnelle du modèle a également été étudiée. Elle permet de réduire le nombre de paramètres à identifier à quatre : F_0 , χ_0 , κ_0 (présentés en 3.2 avec le modèle LLR) et $Y_X^* = Y_X/Y_n$. Ce modèle fait aussi intervenir deux variables de référence fixées par l'utilisateur : un débit de référence Q_R et une longueur de référence X_R . L'annexe 4.4 présente les détails des calculs permettant d'écrire les matrices $\Gamma^{(1)}$ et $\Gamma^{(2)}$ à partir des quatre paramètres adimensionnels et des deux paramètres de référence. Les matrices $\mathcal{G}^{(1)}$ et $\mathcal{G}^{(2)}$ sont alors obtenues par les équations (4.7). Les deux modèles (modèle dimensionnel et modèle adimensionnel) sont présentés ici, de manière à illustrer la question de l'identifiabilité et l'intérêt d'une réduction du nombre de paramètres.

Identification fréquentielle

Le problème de l'identification des paramètres revient donc à trouver θ qui minimise un critère donné. Les sorties du modèle sont le débit aval et la hauteur d'eau amont. Le critère retenu doit donc faire état de la qualité de simulation de ces deux variables. Pour des données Entrée/Sortie sur l'intervalle de temps $[0; \tau]$, le critère est défini par la fonction coût suivante :

$$\mathcal{J}(\theta) = \int_0^\tau w_Q \left(\frac{q_X(t) - \hat{q}_X(t|\theta)}{Q_{norm}} \right)^2 dt + \int_0^\tau w_Y \left(\frac{y_0(t) - \hat{y}_0(t|\theta)}{Y_{norm}} \right)^2 dt \quad (4.8)$$

où w_Q et w_Y sont des coefficients de pondération permettant de donner plus de poids au débit ou à la hauteur d'eau respectivement, $\hat{q}_X(t|\theta)$ et $\hat{y}_0(t|\theta)$ représentent le débit aval et la hauteur d'eau amont simulés avec le jeu de paramètre θ , Q_{norm} et Y_{norm} des coefficients permettant de normaliser les écarts sur les débits et les hauteurs d'eau.

Ce critère est ensuite transposé dans le domaine fréquentiel en utilisant les propriétés fréquentielles des signaux Entrée/Sortie. On supposera en outre que les signaux peuvent être correctement reproduits à partir d'un nombre fini de modes fréquentiels $(\omega_k)_{k=1..N}$, et que ces modes sont les mêmes pour tous les signaux. Par une transformée de Fourier classique, on peut écrire la décomposition fréquentielle de ces signaux comme suit (pour les N modes dominants) :

$$q_0(t) \approx \sum_{k=0}^N a_k^{(0)} e^{j\omega_k t} + \overline{a_k^{(0)}} e^{-j\omega_k t} \quad (4.9)$$

$$y_X(t) \approx \sum_{k=0}^N b_k^{(X)} e^{j\omega_k t} + \overline{b_k^{(X)}} e^{-j\omega_k t} \quad (4.10)$$

De même on représente $q_X(t)$ par $a_k^{(X)}$, $y_0(t)$ par $b_k^{(0)}$, $\hat{q}_X(t|\theta)$ par $\alpha_k(\theta)$ et $\hat{y}_0(t|\theta)$ par $\beta_k(\theta)$.

Le modèle de Saint-Venant défini par l'équation (4.5) permet alors d'écrire :

$$\begin{aligned} \alpha_k &= a_k^{(0)} g_{11}(X, j\omega) + b_k^{(X)} g_{12}(X, j\omega) & \overline{\alpha_k} &= \overline{a_k^{(0)}} g_{11}(X, j\omega) + \overline{b_k^{(X)}} g_{12}(X, j\omega) \\ \beta_k &= a_k^{(0)} g_{21}(X, j\omega) + b_k^{(X)} g_{22}(X, j\omega) & \overline{\beta_k} &= \overline{a_k^{(0)}} g_{21}(X, j\omega) + \overline{b_k^{(X)}} g_{22}(X, j\omega) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Remarque : Il est à noter que $g_{ij}(X, -j\omega) = \overline{g_{ij}(X, j\omega)}$.

Si on choisit pour τ un multiple de la plus grande période considérée ($\tau = \frac{2\pi p}{\omega_1}$, p entier), il vient :

$$\mathcal{J}(\theta) \approx \hat{\mathcal{J}}(\theta, N) = 2\tau \sum_{k=0}^N \left[w_Q \left| \frac{a_k^{(X)} - \alpha_k(\theta)}{Q_{norm}} \right|^2 + w_Y \left| \frac{b_k^{(0)} - \beta_k(\theta)}{Y_{norm}} \right|^2 \right] \quad (4.12)$$

L'écriture du critère sous la forme fréquentielle permet de réduire considérablement les temps de calcul lors de la phase d'identification.

Application

La méthode d'identification est à présent appliquée au cas de la rivière San Joaquin sur le bief considéré. L'application, présentée par Munier *et al.* (2007), se décompose en quatre points : la décomposition fréquentielle des entrées et sorties, l'identification des paramètres, une analyse de sensibilité et la validation.

Décomposition fréquentielle

La décomposition en série de Fourier a été appliquée aux signaux d'entrée q_0 et y_X et aux signaux de sortie q_X et y_0 . Une puissance de coupure de 0.02 dB/Hz a permis de sortir 27 modes prédominants. Les spectres complets et réduits aux modes prédominants sont présentés sur la

figure 4.3. On peut relever sur ces graphes les fréquences des deux premiers modes ($1.157 \cdot 10^{-5}$ Hz et $2.240 \cdot 10^{-5}$) correspondant à des périodes de 24 h et 12.4 h. Ces deux modes traduisent les influences des marées solaire et lunaire respectivement.

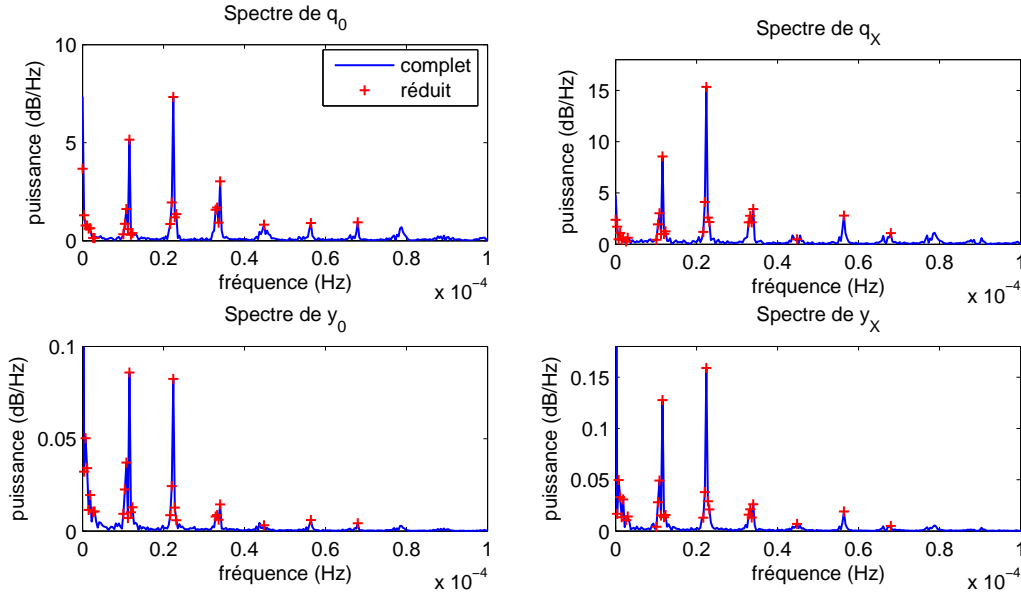


FIGURE 4.3 – Décomposition fréquentielle des données

La figure 4.4 présente les signaux recomposés à partir des modes prédominants, comparés aux signaux réels. Ce dernier graphe montre que 27 modes permettent de représenter le comportement des hauteurs d'eau amont et aval de manière satisfaisante. Quant aux débits, le comportement global est bien représenté par les modes dominants, mais ces derniers ne suffisent pas à décrire les petites oscillations que l'on peut observer au niveau des crêtes. Les résultats étant toutefois assez satisfaisant, le nombre de 27 modes sera conservé pour la suite.

Identification

Pour le calcul du critère $\hat{\mathcal{J}}$, les coefficients de normalisation sont définis par :

$$Q_{norm} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N |a_k^{(X)}| \quad \text{et} \quad Y_{norm} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N |b_k^{(0)}| \quad (4.13)$$

Les coefficients de pondération w_Q et w_Y ont été fixés à 0.5 dans un premier temps. Les configurations $w_Q = 1$ et $w_Y = 0$, puis $w_Q = 0$ et $w_Y = 1$ ont également été testées afin d'observer l'importance d'utiliser les deux données (q_X et y_0) pour le calage. Le tableau 4.1 rassemble les résultats d'identification pour le modèle dimensionnel. Les trois cas étudiés présentent des valeurs de paramètres très différentes. Les paramètres de la première configuration ($w_Q = 0.5$ et $w_Y = 0.5$) pourraient toutefois correspondre à des valeurs réalistes. Quant au critère, il est logiquement plus élevé pour la première configuration puisque les contraintes sont doubles.

Les figures 4.5 à 4.7 présentent les résultats temporels obtenus par transformée de Fourier inverse, pour les trois cas étudiés. On peut voir sur ces graphes que lorsque l'on fixe w_Y à 0, le débit

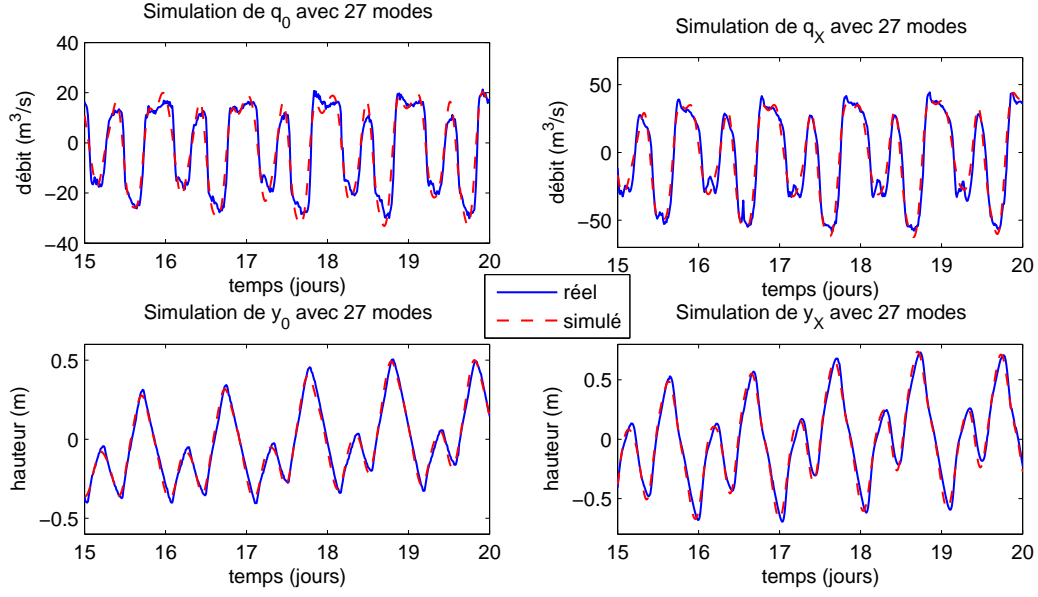
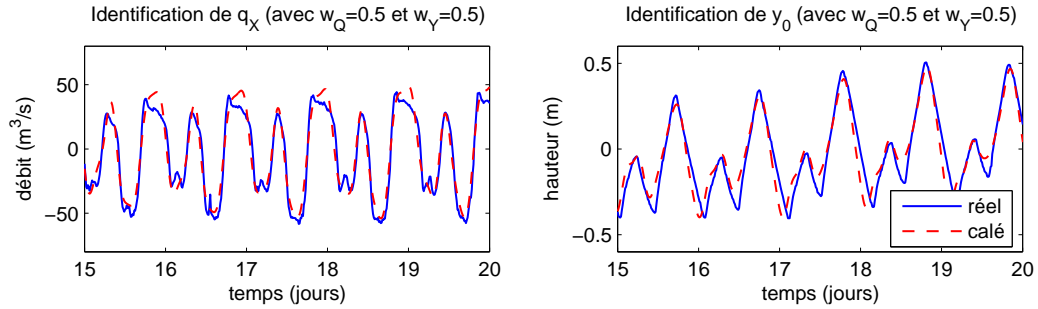


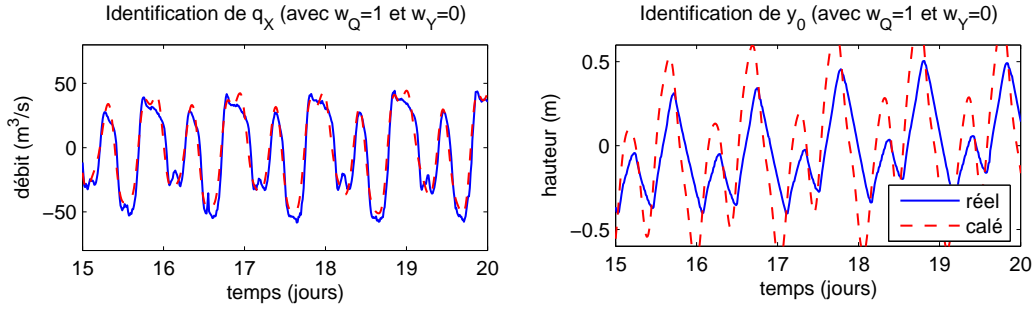
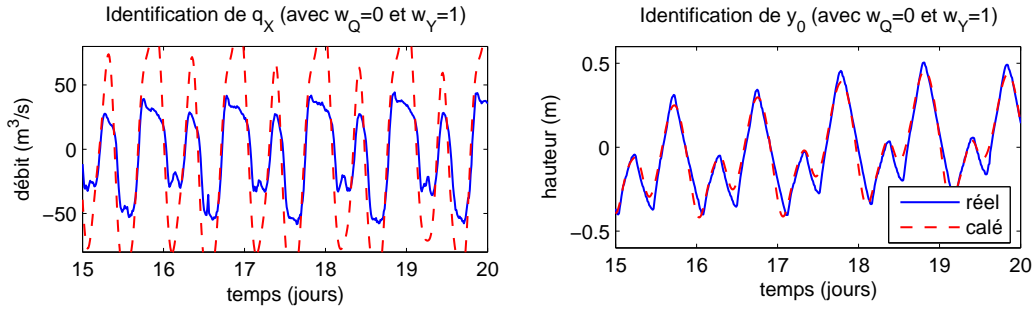
FIGURE 4.4 – Comparaison des données réelles et recomposées à partir des 27 modes principaux

w_Q	w_Y	Q (m³/s)	B (m)	S_b	n (sm ^{-1/3})	Y_X (m)	$\hat{\mathcal{J}}$
0.5	0.5	19.20	40.44	0.000143	0.0299	3.32	4.26
1	0	306.38	30.88	0.000273	0.0057	6.61	1.26
0	1	63.83	122.64	0.000709	0.6083	15.66	3.22

TABLEAU 4.1 – Résultats d'identification pour différentes valeurs des coefficients de pondération w_Q et w_Y FIGURE 4.5 – Résultat d'identification pour $w_Q = 0.5$ et $w_Y = 0.5$

aval simulé n'est que très légèrement amélioré, alors que la hauteur d'eau amont est fortement dégradée. De même, lorsque w_Q est fixé à 0, l'amélioration sur la hauteur d'eau amont est très peu visible pour une dégradation importante sur le débit aval.

Pour le modèle adimensionnel, les résultats d'identification pour le cas $w_Q = 0.5$ et $w_Y = 0.5$ sont présentés dans le tableau 4.2. Ces valeurs, obtenues avec un débit de référence $Q_R = 20$ m³/s et une longueur de référence $X_R = 16000$ m, correspondent aux caractéristiques adimensionnelles relatives aux paramètres dimensionnels calés (première ligne du tableau 4.1). Toutefois quelques points sont à préciser quant à la procédure d'identification. Dans le cas du modèle dimensionnel,

FIGURE 4.6 – Résultat d'identification pour $w_Q = 1$ et $w_Y = 0$ FIGURE 4.7 – Résultat d'identification pour $w_Q = 0$ et $w_Y = 1$

l'identification était très sensible au point initial dans l'espace des paramètres et convergait souvent vers des minima locaux. Il a donc fallu quadriller l'espace des paramètres pour trouver un point proche du minimum global. Ce point a alors servi de point initial pour la procédure d'identification. Dans le cas du modèle adimensionnel, l'identification a convergé beaucoup plus rapidement vers le minimum global, et ce quel que soit le point initial choisi. Ceci est une parfaite illustration du problème d'identifiabilité. L'étude de sensibilité qui suit permettra de visualiser ce problème.

Sensibilité

Nous regardons ici la sensibilité du modèle aux différents paramètres. Une façon de l'aborder est de tracer l'évolution du critère aux environs du point obtenu par identification. La figure 4.8 représente, pour chaque paramètre, la variation du critère $\hat{\mathcal{J}}$ pour une variation de $\pm 10\%$, tout autre paramètre étant fixé par ailleurs. Ces graphes semblent montrer que le jeu de paramètres obtenu par identification correspond bien à un minimum. On peut également déduire de ces courbes que les paramètres S_b et Y_X sont plus sensibles, et donc plus facile à caler.

Nous avons également tracé sur la figure 4.9 l'évolution du critère pour une variation de deux paramètres simultanément (variance d'ordre 2). Dans la plupart des cas, la variance d'ordre 2 suffit à évaluer la variance de la sortie d'un modèle (Henderson-Sellers *et al.*, 1993; Liang et Guo, 2003). Chaque couple de paramètres est traité en considérant les autres paramètres constants. Sur ces figures, les isolignes extérieures représentent une augmentation de 1 % du critère. On peut distinguer deux types de graphes. Les premiers, tels que pour le couple (Q_0, B) par exemple, montrent clairement que le point d'identification (représenté par une croix), correspond bien à

w_Q	w_Y	F_0	χ_0	κ_0	Y_X^*	$\hat{\mathcal{J}}$
0.5	0.5	0.13	1.97	2.26	2.88	4.26

TABLEAU 4.2 – Résultats d'identification pour le modèle adimensionnel avec $w_Q = 0.5$ et $w_Y = 0.5$

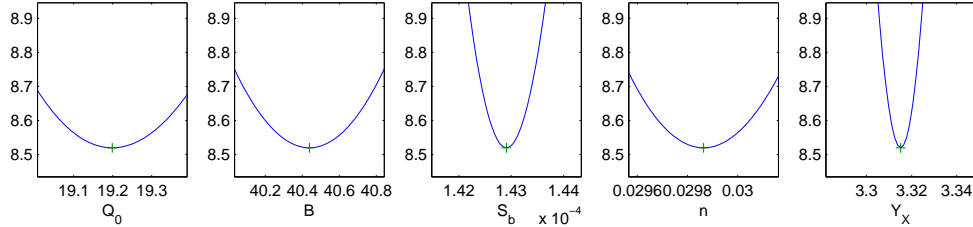


FIGURE 4.8 – Sensibilité autour du point d'identification

un minimum dans l'espace restreint à deux paramètres. Par contre on peut voir que pour certains couples comme (Q_0, S_b) , il peut exister un axe selon lequel le critère est quasiment à sa valeur minimale. Ainsi, le modèle peut être très sensible à une variation d'un paramètre seul (par exemple S_b), mais très peu sensible à une variation simultanée de deux paramètres (par exemple Q_0 et S_b).

Dans le cas du modèle de transfert développé pour cette application, il est possible d'améliorer l'identifiabilité en réduisant le nombre de paramètres nécessaires pour décrire la dynamique de l'écoulement. Pour ce faire, nous utilisons le modèle adimensionnel développé et calé précédemment. La figure 4.10 présente la sensibilité du critère autour du point d'identification pour une variation simultanée de deux paramètres. Le résultat montre clairement que l'identifiabilité est améliorée avec le modèle adimensionnel. Toutefois, on peut encore observer un axe particulier pour le couple (χ, Y_X^*) , ce qui montre qu'un lien existe entre ces deux paramètres. Ceci peut s'expliquer par le fait que le paramètre χ représente la dénivelée totale sur la longueur du bief rapportée à la hauteur d'eau dans le bief, elle-même liée à la hauteur d'eau à l'aval. D'après ces résultats graphiques, on peut écrire que le critère ne varie quasiment pas si χ et Y_X^* vérifient l'équation :

$$Y_X^* = 0.907 + \chi \quad (4.14)$$

Nous avons intégré cette équation dans le modèle adimensionnel, ce qui permet de réduire encore le nombre de paramètres à identifier à trois. L'identification de ce nouveau modèle, appelé modèle adimensionnel réduit, conduit au même jeu de paramètres que précédemment. Une nouvelle étude de sensibilité (figure 4.11) semble montrer que le nombre de paramètres a été réduit au maximum. Le modèle adimensionnel réduit est alors parfaitement identifiable.

Ce cas d'étude a permis d'illustrer l'intérêt de l'étude de sensibilité pour analyser la pertinence du choix des paramètres. Nous avons également pu voir à travers cette application que minimiser le nombre de paramètres du modèle permettait de réduire les problèmes d'identifiabilité.

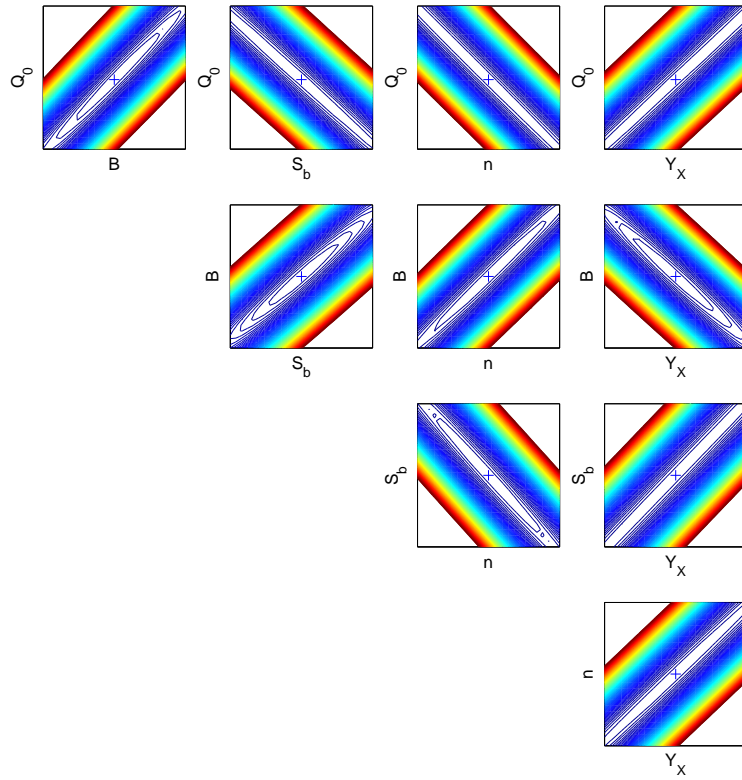


FIGURE 4.9 – Sensibilité autour du point d'identification

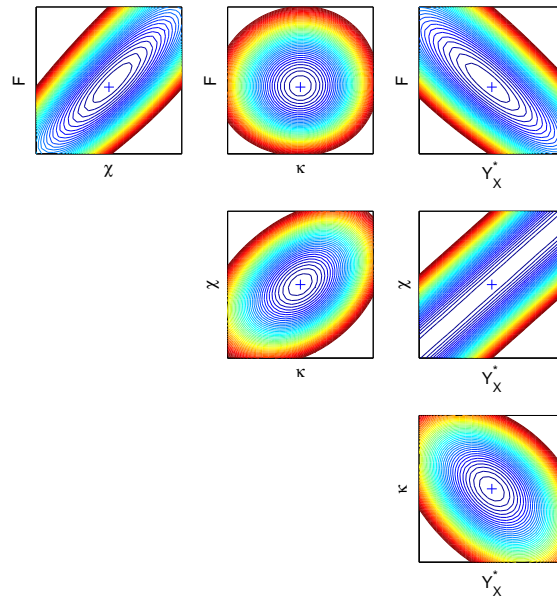


FIGURE 4.10 – Sensibilité autour du point d'identification avec le modèle adimensionnel

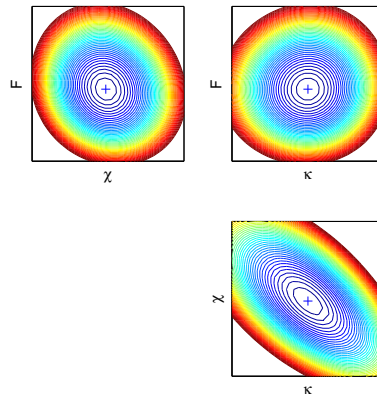
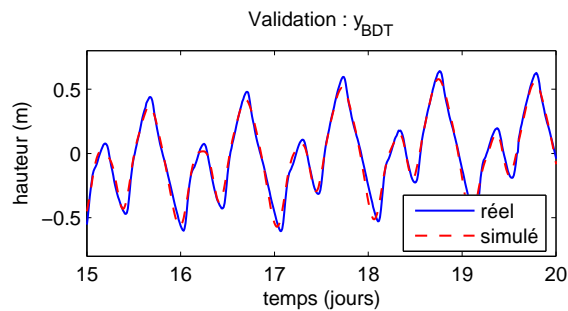


FIGURE 4.11 – Sensibilité autour du point d’identification avec le modèle adimensionnel réduit

Validation

Etant donné que la période d’étude est relativement courte, il est peu judicieux de la scinder en deux afin de procéder à une validation du modèle sur une période différente que pour l’identification. En revanche, nous disposons d’une donnée supplémentaire qui est la hauteur d’eau en un point intermédiaire nommé BDT (voir figure 4.2). Le modèle développé ici donne en sortie le débit aval et la hauteur d’eau amont. Mais puisqu’il est basé sur les équations de la physique, il est tout à fait possible d’obtenir, par une méthode similaire, le débit ou la hauteur d’eau en tout point du bief à partir des entrées, à savoir q_0 et y_X . Toutefois dans un souci de concision, le détail du calcul n’est pas présenté ici, seul le résultat est présenté sur la figure 4.12. On peut y voir que, malgré une légère sous-estimation des valeurs de pointe, le modèle reproduit très bien les variations de la hauteur d’eau à ce point intermédiaire.

FIGURE 4.12 – Validation au point intermédiaire (avec $w_Q = 1$ et $w_Y = 1$)

Conclusion

Cette application a tout d’abord permis d’établir une méthode d’identification fréquentielle efficace. Cette méthode, rendue possible par la présence de modes fréquents dominants dus aux phénomènes de marée, présente plusieurs avantages :

- elle évite les passages entre domaine fréquentiel et domaine temporel introduisant des algo-

- rithmes numériques de calcul ;
- en temporel, le calcul du critère se fait sur toute la série de données, alors qu'ici il est réduit aux 27 valeurs correspondant aux modes dominants, ce qui permet de diminuer considérablement les temps de calcul ;
- il n'est pas nécessaire d'approcher la fonction de transfert par une fonction de transfert simplifiée (par exemple du type premier ordre avec retard).

Nous avons également pu aborder, à travers cette application, les problèmes d'identifiabilité dus à une sur-paramétrisation du modèle. Ces problèmes ont été mis en évidence par une étude de sensibilité portant sur l'influence de variations simultanées de deux paramètres (variance d'ordre 2). La synthèse d'un modèle adimensionnel équivalent a permis de diminuer le nombre de paramètres à identifier, réduisant ainsi les problèmes d'identifiabilité. Les résultats de l'analyse de sensibilité ont enfin permis d'aboutir à une version minimale du modèle, décrit par trois paramètres uniquement (F , χ et κ).

4.2.2 Commande en boucle ouverte (canal de Gignac)

Problématique de la commande en boucle ouverte

La commande en boucle ouverte (BO) est une application essentielle de l'automatique, et concerne de nombreux domaines. Elle est illustrée ici à travers le cas particulier des canaux d'irrigation. Le système considéré est un bief du canal de Gignac délimité par les stations Partiteur et Avencq. Ce canal est utilisé pour alimenter un périmètre irrigué d'environ 3000 ha, et répond donc à des besoins en eau particuliers. Le gestionnaire doit satisfaire une demande qui varie tout au long de la saison d'irrigation, tout en économisant au maximum la ressource. Des vannes sont disposées tout le long du canal (dont une à la station Partiteur) de manière à pouvoir alimenter les prises d'irrigation en période de demande, et limiter l'approvisionnement le reste du temps.

Prenons l'exemple illustré sur la figure 4.13. Supposons que les irrigants aient un besoin important en eau sur une période limitée dans le temps (schéma de gauche). Afin de satisfaire cette demande, le gestionnaire doit tenir compte de la dynamique de l'écoulement dans le canal, notamment du retard entre l'ouverture d'une vanne à l'amont et l'arrivée du débit à l'aval, et l'atténuation le long du bief. Pour s'assurer qu'un débit suffisant sera disponible dans le canal pendant toute la période d'irrigation, le gestionnaire doit donc anticiper l'ouverture de la vanne amont (schéma du milieu). Le schéma de droite présente le débit aval désiré comparé au débit aval observé suite à la manœuvre de la vanne amont. On peut y voir une zone pleine représentant le volume d'eau non utilisé, et donc gaspillé. Cet exemple montre que pour éviter le gaspillage, le gestionnaire a tout intérêt d'utiliser un modèle hydraulique représentant au mieux la dynamique de l'écoulement dans le bief.

Dans ce contexte, la commande en BO consiste à déterminer, à partir d'un modèle d'écoulement dans le bief et d'une consigne en débit à l'aval, la manœuvre de la vanne amont qui permettra de respecter au mieux la consigne. A l'opposé de la commande en boucle fermée qui utilise en temps réel des données sur le système pour éventuellement corriger les défauts ou perturbations

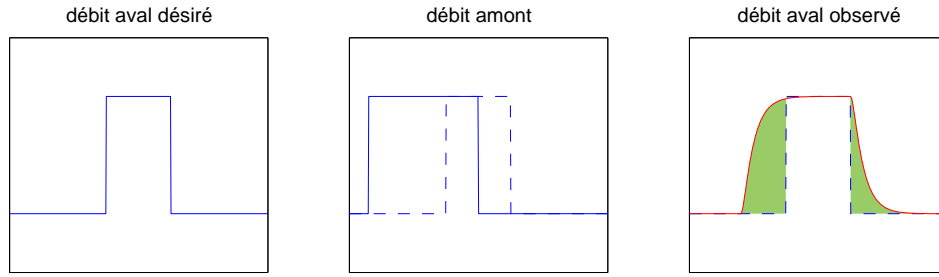
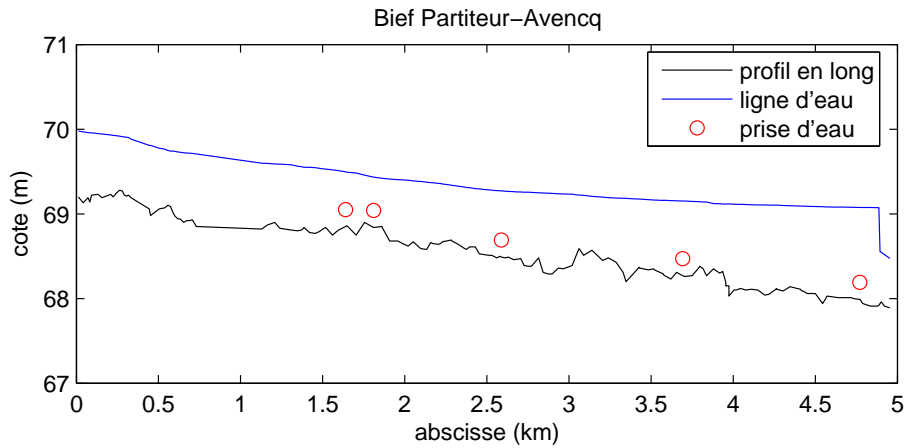


FIGURE 4.13 – Problématique de la commande en boucle ouverte

FIGURE 4.14 – Bief Partiteur-Avencq : profil en long, prises d'eau et ligne d'eau pour un débit de $0.5 \text{ m}^3/\text{s}$

imprévus, la commande en BO n'utilise qu'un signal déterminé à l'avance et ne prend en compte aucun retour sur l'état du système pendant l'expérimentation.

Présentation du bief de Gignac : Partiteur-Avencq

Le bief considéré ici a une longueur d'environ 5 km pour une pente moyenne de $2.4 \cdot 10^{-4}$ et une largeur moyenne d'environ 2 m. Pendant la saison d'irrigation, le débit dans ce bief varie entre 0.2 et $0.8 \text{ m}^3/\text{s}$. Une vanne automatique est située à l'amont et permet des variations du débit amont. Deux seuils sont également présents sur le bief, l'un vers le milieu et l'autre à l'aval. Ils permettent entre autres de maintenir dans le canal un niveau d'eau suffisant pour alimenter les 5 prises d'eau situées sur les parois latérales du canal. Ces prises d'eau sont des orifices d'environ 15 cm de diamètre et alimentent des canaux secondaires servant à l'irrigation des parcelles. La figure 4.14 présente le profil en long du bief et la position des prises d'eau.

Modèle hydraulique

Le modèle utilisé pour la commande en BO sera un modèle linéaire du type premier ordre plus retard. Nous considérons donc les variations autour d'un régime de référence défini par un débit amont $\overline{Q_0}$ constant, un débit dérivé aux prises $\overline{Q_l}$ constant et un débit aval $\overline{Q_X}$ constant. La

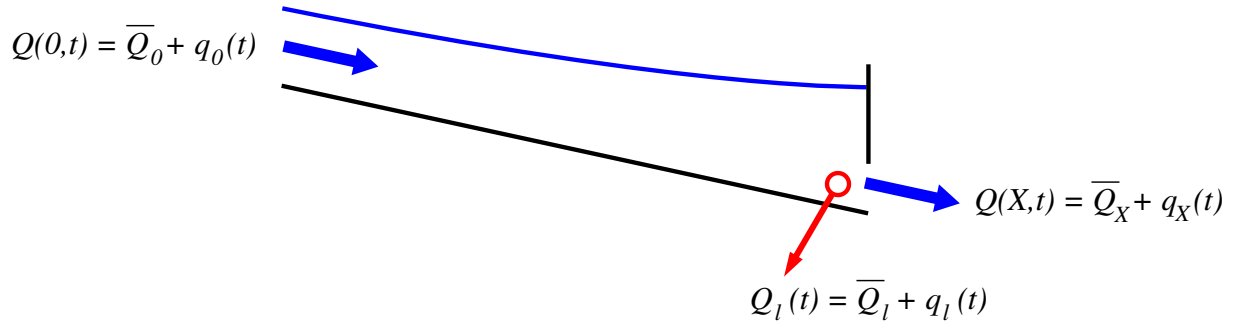


FIGURE 4.15 – Schéma du modèle hydraulique

hauteur d'eau pour le régime de référence n'est pas nécessairement uniforme. Pour le régime de référence, on pourra donc écrire :

$$\overline{Q_X} = \overline{Q_0} + \overline{Q_l} \quad (4.15)$$

Le débit aux prises d'eau dépend de la hauteur d'eau au droit de la prise. Toutefois, pour simplifier l'influence de ces prises sur l'écoulement, nous supposons que tous les débits latéraux sont situés à l'aval. Le bief considéré est schématisé sur la figure 4.15.

Afin d'évaluer l'importance des variations du débit latéral dues aux variations de hauteur d'eau dans le bief, deux modèles seront étudiés indépendamment. Le premier fera l'hypothèse d'un débit latéral constant, le deuxième proposera une approximation linéaire des variations du débit latéral.

– Débit latéral constant

Comme nous l'avons déjà précisé, le transfert du débit amont sera approché par une fonction de type premier ordre avec retard. Si l'on suppose le débit latéral constant, les variations du débit aval s'écriront, dans le domaine de Laplace :

$$q_X(s) = \frac{e^{-\tau s}}{1 + Ks} q_0(s) \quad (4.16)$$

Les paramètres τ et K peuvent être déduits des caractéristiques du bief par la méthode proposée dans le chapitre 3. Cependant, nous préférons caler ces paramètres à partir d'un événement réel afin d'obtenir le meilleur modèle possible.

Ce premier modèle sera nommé FOD pour *First Order plus Delay*.

– Débit latéral variable

On suppose à présent le débit latéral dérivé aux prises variable. Les prises sont des orifices dans les parois latérales, donc en faisant l'hypothèse que toutes les prises sont situées à l'aval, on peut dire que le débit latéral dépend de la hauteur d'eau à l'aval $Y(X, t)$. Ainsi, une approximation linéaire du débit latéral conduit à :

$$q_l(s) = k_l y_X(s) \quad (4.17)$$

où k_l est un coefficient de linéarité.

Par ailleurs, nous avons vu dans le chapitre 3 que la présence d'un ouvrage à l'aval pouvait se traduire par l'équation de *feedback*, obtenue par linéarisation de l'équation d'ouvrage :

$$q_X(s) = k y_X(s) \quad (4.18)$$

Ainsi on pourra écrire :

$$q_l(s) = \frac{k_l}{k} q_X(s) \quad (4.19)$$

Le débit aval étant égal au débit amont propagé (par une fonction de transfert de type premier ordre avec retard) auquel est soustrait le débit latéral, on obtient la fonction de transfert suivante permettant d'obtenir le débit aval :

$$\begin{aligned} q_X(s) &= \frac{e^{-\tau s}}{1 + K s} q_0(s) - q_l(s) \\ &= \frac{G e^{-\tau s}}{1 + K s} q_0(s) \end{aligned} \quad (4.20)$$

avec $G = k/(k + k_l)$.

Ce modèle sera nommé G-FOD pour *Gain and First Order plus Delay*. De même que pour le modèle FOD, les paramètres G , τ et K seront identifiés à partir de données réelles.

Synthèse d'un contrôleur BO

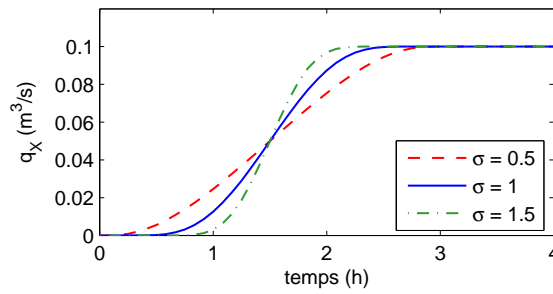
Le débit aval cible \widetilde{q}_X prendra la forme d'une fonction Gevrey définie par :

$$\widetilde{q}_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ q_T \frac{\int_0^{t/T} \exp(-1/(t'(1-t'))^\sigma) dt'}{\int_0^1 \exp(-1/(t'(1-t'))^\sigma) dt'} & 0 \leq t \leq T \\ q_T & t > T \end{cases} \quad (4.21)$$

avec σ un paramètre de forme. Le débit final atteint au temps T est désigné par q_T . Le choix d'une fonction de ce type a été motivé par une étude parallèle d'un contrôleur basé sur la méthode *differential flatness*. Ce contrôleur, développé par Di Meglio *et al.* (2008) et Rabbani *et al.* (2009), est défini à travers une série infinie qui nécessite l'utilisation d'une fonction de type Gevrey afin d'en assurer la convergence. Les manipulations que nous avons pu mener sur le canal de Gignac ont permis de valider ce contrôleur ainsi que celui que nous proposons ici, ce qui justifie l'utilisation de la même fonction pour le débit aval cible. Le but de cette partie n'étant pas de présenter cet autre contrôleur, nous noterons juste que les deux contrôleurs mènent à des performances similaires.

La figure 4.16 présente la fonction \widetilde{q}_X pour $T = 3$ h et $q_T = 0.1$ m³/s, et pour différentes valeurs de σ .

Le contrôle est représenté par le débit amont q_0 qui permettra d'obtenir le débit aval cible \widetilde{q}_X . Pour déterminer q_0 , il suffit d'inverser l'équation différentielle ordinaire déterminée par la fonction

FIGURE 4.16 – Fonction Gevrey pour différentes valeurs de σ et pour $q_T = 0.1 \text{ m}^3/\text{s}$ et $T = 3 \text{ h}$

de transfert (4.16) ou (4.20). On obtient alors :

$$q_0(t) = \frac{1}{G} \left(K \frac{d}{dt} q_X(t - \tau) + q_X(t - \tau) \right) \quad (4.22)$$

Validation théorique

Avant d'être testés en conditions réelles, ces deux modèles sont validés sur un cas théorique simulé avec le logiciel SIC, pour lequel on dispose d'un modèle du bief considéré. Les prises latérales peuvent être simulées soit par un débit latéral constant (fixé à 15 l/s, soit 75 l/s sur les 5 prises), soit par un débit latéral dépendant de la hauteur d'eau au droit de la prise. Le coefficient de Strickler a été fixé lors d'un calage antérieur à $47 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$. Le pas de temps de calcul est de 5 min.

1. Identification

Dans un premier temps, les deux modèles sont calés sur la réponse aval à une ouverture brusque de la vanne amont. Le débit amont du régime de référence $\overline{Q_0}$ est égal à $0.4 \text{ m}^3/\text{s}$. Les paramètres à identifier sont : $\overline{Q_l}$, τ , K ainsi que G pour le cas Q_l variable. L'identification a été menée pour le modèle FOD dans le cas d'un débit latéral constant, et pour les modèles FOD et G-FOD dans le cas d'un débit latéral variable. Les résultats sont rassemblés dans le tableau 4.3. La figure 4.17 présente le débit relatif amont q_0 , et les résultats d'identification pour les deux modèles dans les cas d'un débit latéral constant et variable. On peut y voir que le modèle FOD introduit un décalage en début et en fin de simulation. Ce décalage est dû au fait que le débit augmente au cours de la simulation, ce qui fait augmenter la hauteur d'eau dans le bief et le débit latéral devient donc plus important. On peut voir que la variation du débit latéral est bien reprise par le modèle G-FOD.

Q_l	Modèle	$\overline{Q_l} \text{ (m}^3/\text{s)}$	$\tau \text{ (s)}$	$K \text{ (s)}$	G
Constant	FOD	-0.074	4052	3191	
Variable	FOD	-0.089	5091	2446	
Variable	G-FOD	-0.078	3901	3166	0.89

TABLEAU 4.3 – Résultats d'identification des modèles FOD et G-FOD pour la validation théorique

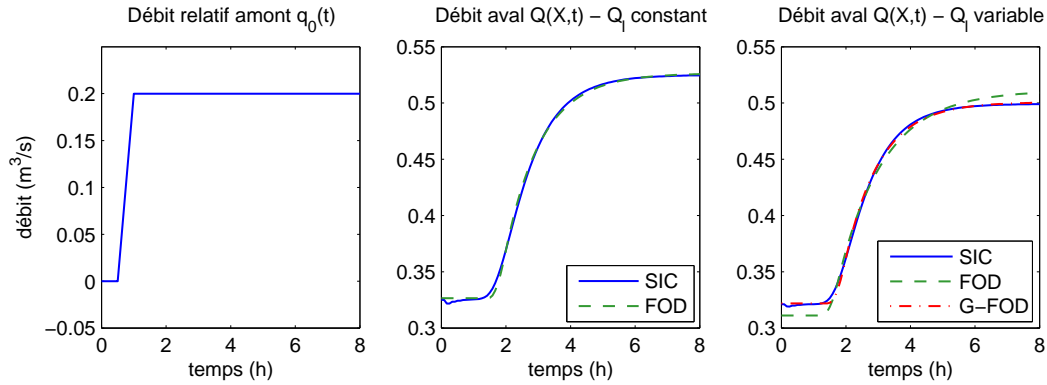


FIGURE 4.17 – Résultats d'identification avec le logiciel SIC pour les deux cas Q_l constant et Q_l variable

2. Contrôle BO

Pour la validation théorique, nous avons choisi $\sigma = 1$, $T = 3$ h et $q_T = 0.1$ m³/s. Le calcul du contrôle q_0 a été fait à partir de l'équation (4.22), pour les trois modèles décrits par les jeux de paramètres du tableau 4.3.

La figure 4.18 présente le contrôle calculé avec le modèle FOD sous l'hypothèse d'un débit latéral constant, et le débit aval obtenu comparé au débit aval cible. Avec l'hypothèse d'un débit latéral variable, les mêmes courbes sont représentées sur la figure 4.19. Le graphe de gauche correspond au modèle FOD, celui de droite au modèle G-FOD. On peut voir que le modèle FOD, qui ne tient pas compte de l'augmentation du débit latéral due à l'augmentation du niveau d'eau dans le bief, propose une valeur finale du débit aval plus faible que celle attendue. Au contraire, le contrôle obtenu par le modèle G-FOD permet de bien reproduire le débit aval cible.

On peut noter un léger écart entre le débit aval cible et le débit aval simulé au niveau de la deuxième courbure. Cet écart pourrait être diminué en augmentant l'ordre du modèle (par exemple avec un deuxième ordre). Toutefois, nous avons choisi de conserver l'approximation d'un premier ordre, considérant que l'amélioration apportée par un ordre supérieur ne serait que très peu visible en situation réelle, compte tenu du fonctionnement de la vanne décrit ci-après.

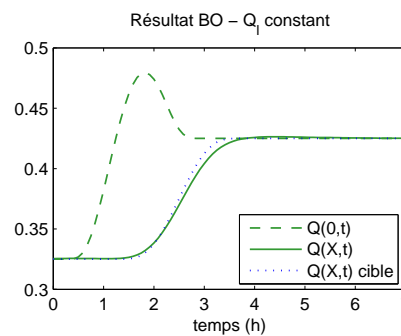


FIGURE 4.18 – Calcul du contrôle $q_0(t)$ pour un débit latéral constant avec le modèle FOD

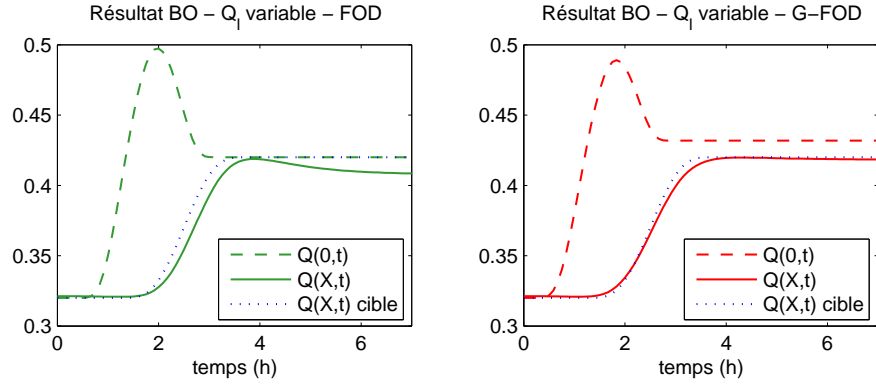


FIGURE 4.19 – Calcul du contrôle $q_0(t)$ pour un débit latéral variable avec les modèles FOD et G-FOD

Implémentation sur le canal de Gignac

Nous avons testé la validité en situation réelle des deux contrôleurs décrits précédemment (FOD et G-FOD) sur le bief Partiteur-Avencq du canal de Gignac (voir figure 4.14). Les données de débits amont et aval sont transmises en temps réel au pas de temps de 5 min. Avant de présenter les résultats d'identification et de contrôle, nous décrivons le fonctionnement de la vanne amont.

1. *Fonctionnement de la vanne*

Des consignes d'ouverture et de fermeture de la vanne amont peuvent être télétransmises en temps réel toutes les 5 minutes. Un capteur de position permet de connaître à ce même pas de temps l'ouverture de la vanne. Un algorithme basé sur l'équation de la vanne permet de convertir un débit traversant la vanne en ouverture de vanne. Ainsi, le débit amont q_0 calculé pour satisfaire le débit aval cible \widetilde{q}_X pourra être envoyé directement à la vanne.

Du fait de l'inertie de la vanne due à ses dimensions (environ 1 m x 1 m) et le système d'hydraulique de puissance permettant de la manoeuvrer, il est très difficile de régler l'ouverture avec une grande précision. Une zone morte de ± 2 cm autour de la valeur cible permet d'éviter des oscillations trop importantes. Ainsi, lorsque le capteur de position indique une valeur incluse dans cette zone morte, il est considéré que la vanne a atteint sa position. La présence de la zone morte introduit un décalage par rapport aux valeurs souhaitées. La position étant vérifiée toutes les 5 min, ce décalage est corrigé à ce même pas de temps, ce qui peut provoquer des oscillations à une fréquence de 0.003 Hz. Les modèles proposés permettent de vérifier que ces oscillations seront invisibles depuis l'aval. En effet, la constante de premier ordre K a une valeur de l'ordre de l'heure, ce qui correspond à une fréquence de coupure de l'ordre de 10^{-5} Hz, bien inférieure à la fréquence d'oscillation. Le calcul du gain de la fonction de transfert permet d'établir une atténuation de plus de 98 % pour un signal sinusoïdal de période 5 min. Ainsi les oscillations dues à la zone morte ne sont pas gênantes dans notre contexte.

2. Identification

L'identification des paramètres nécessite des mesures des débits amont et aval lors d'un événement antérieur. Plusieurs contrôleurs ont été testés lors de l'expérience qui a duré plusieurs jours. Chaque modèle utilisé a été calibré lors de l'événement mesuré le plus récent, ceci afin de limiter les changements de conditions (ruissellement lié aux précipitations, prélèvements) entre le calage du modèle et l'application du contrôleur.

Les résultats d'identification pour les modèles FOD et G-FOD sont présentés dans le tableau 4.4 et sur la figure 4.20.

Modèle	\overline{Q}_l (m ³ /s)	τ (s)	K (s)	G
FOD	-0.070	2490	8523	
G-FOD	-0.055	5055	2662	0.80

TABLEAU 4.4 – Résultats d'identification des modèles FOD et G-FOD pour la validation

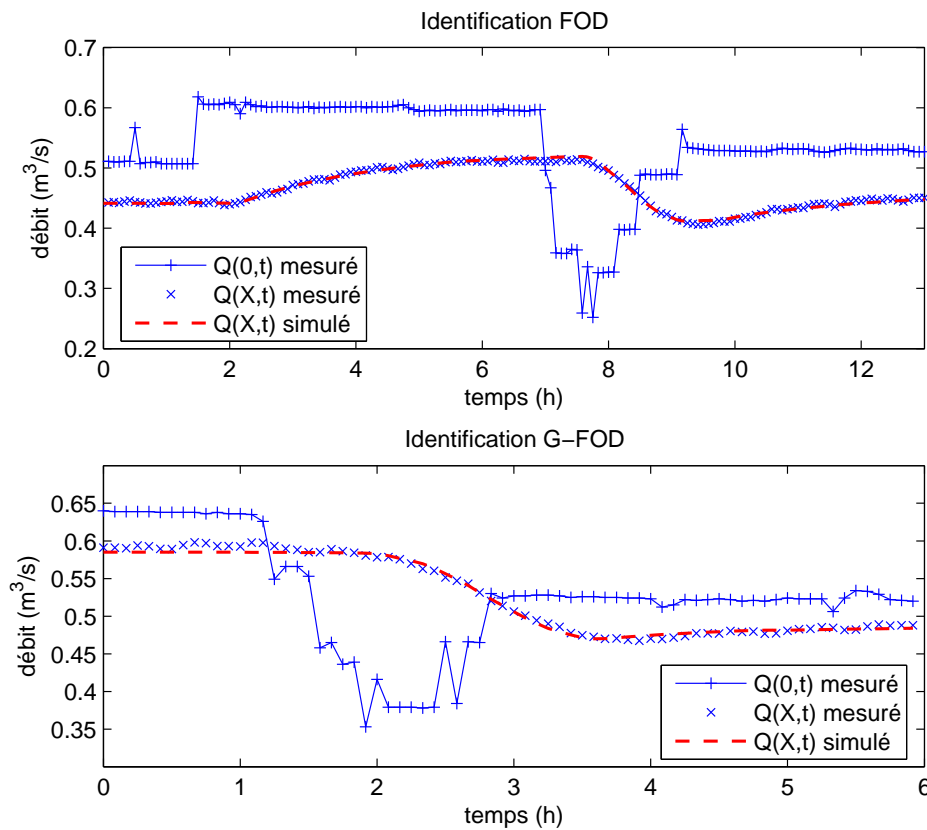


FIGURE 4.20 – Résultats d'identification sur le bief réel de Gignac

3. *Contrôle BO*

On peut voir sur les résultats de simulation que pour obtenir une augmentation suffisamment rapide du débit aval, le débit amont doit passer par des valeurs dépassant la valeur finale. On comprend bien que plus l'augmentation souhaitée du débit aval est rapide, plus le pic du débit amont est important. Pour des raisons de dimensionnement du canal, il sera impossible d'obtenir un débit aval de la forme d'un échelon. Ainsi, pour l'application réelle, le choix des coefficients σ et T a été fait en fonction du débit initial et du débit maximum du canal, de façon à éviter tout débordement ou à-sec.

Les valeurs suivantes ont été retenues :

- Pour FOD : $\sigma = 1$, $T = 3.2$ h, $q_T = -0.1$ m³/s.
- Pour G-FOD : $\sigma = 1$, $T = 5$ h, $q_T = 0.1$ m³/s.

La figure 4.21 présente les résultats pour les deux modèles. Dans les deux cas, le débit aval observé suit correctement le débit aval cible. Néanmoins pour le modèle FOD, on retrouve l'écart entre les valeurs finales des débits aval théorique et mesuré, dû aux variations du débit latéral. En effet, le débit dans le bief a diminué au cours de l'expérience, ce qui a provoqué une diminution de la hauteur d'eau, et donc du débit latéral. Cet écart n'est plus présent dans le cas du modèle G-FOD qui prend bien en compte les variations par le biais du gain G .

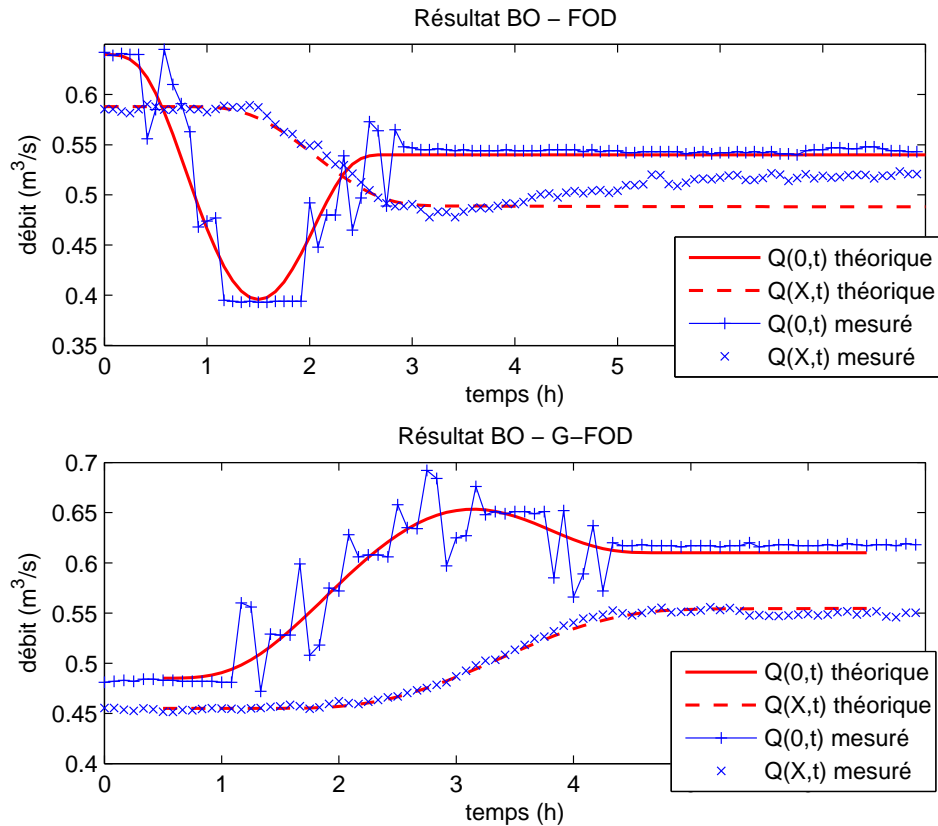


FIGURE 4.21 – Contrôle en BO sur le bief de Gignac pour les modèles FOD et G-FOD

Conclusion

Dans cette application, nous avons mis en œuvre deux modèles simples pour la commande en boucle ouverte dans un bief d'un canal d'irrigation. Le deuxième modèle est une version améliorée du premier permettant de prendre en compte les variations des débits dérivés aux prises latérales dues aux variations de hauteur d'eau dans le canal. Ces deux modèles ont tout d'abord été identifiés puis validés de manière théorique avec le logiciel SIC de modélisation hydraulique. Nous avons pu ensuite tester ces modèles en conditions réelles sur un bief du canal de Gignac. Le modèle amélioré (qui prend en compte les débits latéraux) a permis de reproduire de manière très satisfaisante un débit aval objectif à partir de manœuvres sur une vanne amont gérée de façon automatique. Nous avons pu montrer à travers cette application la pertinence de l'approche de modélisation simplifiée du transfert de débit dans un canal d'irrigation.

4.2.3 Couplage hydraulique - hydrologie (Tarn, Aveyron, Loue)

Nous proposons dans cette dernière application de valider la structure du modèle intégré proposé à la fin du chapitre 3. Le modèle TGR sera identifié puis validé par la procédure de calage-contrôle croisé sur trois bassins versants de caractéristiques différentes. Les résultats seront comparés à ceux obtenus par deux autres modèles : le modèle GR4H et un modèle simple de type gain avec premier ordre et retard.

Présentation des bassins versants et données disponibles

Les bassins versants que nous avons retenus pour cette application concernent une partie des rivières du Tarn, de l'Aveyron et de la Loue. Ces bassins sont issus de la base de données utilisée par Lerat (2009) pour valider le modèle couplé hydrologique-hydraulique. Les tronçons étudiés sont délimités par les stations hydrométriques suivantes, permettant d'avoir les débits amont et aval :

- pour le tronçon du Tarn : Saint-Maurice-de-Ventalon (O3006710) et Mostuéjouls (O3141010),
- pour le tronçon de l'Aveyron : Palmas (O5042510) et Villefranche-de-Rouergue (O5192520),
- pour le tronçon de la Loue : Vuillafans (U2604030) et Champagne-sur-Loue (U2634010).

Nous disposons, pour ces stations hydrométriques, des données en débit au pas de temps horaire sur la période du 1/08/1995 au 31/07/2005. Ces données sont issues de la banque HYDRO du Ministère de l'Ecologie, de l'Energie, du Développement durable et de l'Aménagement du territoire. Les données horaires ont été calculées par Le Moine (2008) à partir des données de pas de temps variable de la procédure QTVAR de la banque HYDRO.

Nous disposons également sur la même période des données pluviométriques horaires reconstituées par combinaison des pluies journalières issues des archives SAFRAN (Durand *et al.*, 1993; Quintana-Seguí *et al.*, 2008) et des pluies horaires calculées par la méthode de Thiessen à partir de postes pluviométriques automatiques de Météo-France.

Enfin, les données d'évapotranspiration potentielle (ETP) ont été calculées au pas de temps horaire à partir des données de températures issues des archives SAFRAN en utilisant la méthode

développée par Lerat (2009).

Les données de pluie et d'ETP utilisées ici ont été fournies par Météo-France, puis calculées et mises en forme par Oudin (2004).

Découpage spatial

Pour réaliser le découpage spatial des bassins versants, nous utilisons la méthode exposée au chapitre 3. Les surfaces drainées ont été calculées à partir d'un MNT (modèle numérique de terrain) de maille 75 m par un algorithme établi par Garbrecht et Martz (1997) et Martz et Garbrecht (1998). Le tracé des courbes des surfaces drainées est présenté sur la figure 4.22 et permet de caractériser la répartition des apports hydrologiques le long du cours d'eau principal. Les sous-bassins latéraux correspondent aux principaux affluents sur les biefs considérés. Les débits simulés à l'exutoire de chacun d'eux seront injectés de manière ponctuelle dans le cours d'eau principal. Le sous-bassin intermédiaire sera considéré comme un apport uniformément distribué sur tout le bief.

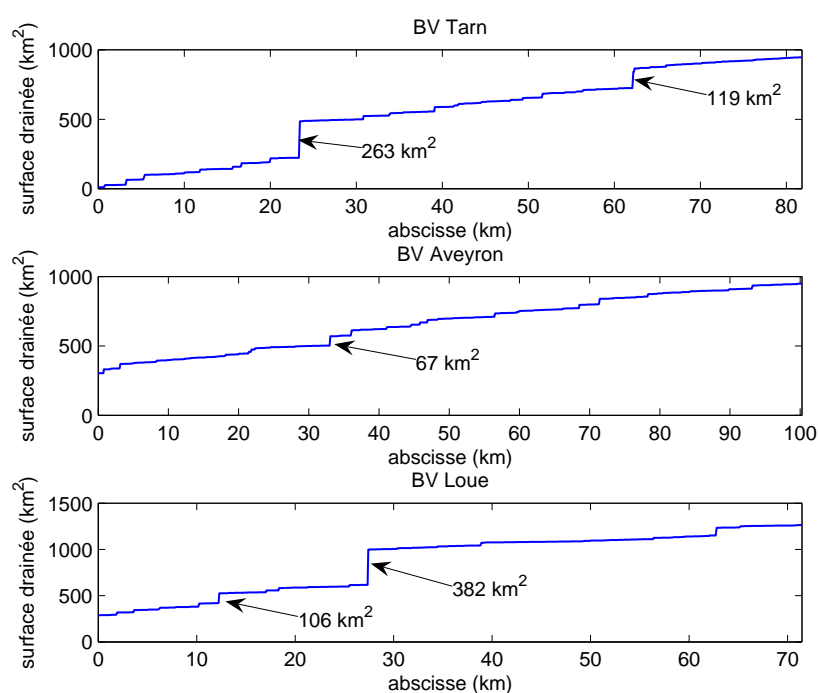


FIGURE 4.22 – Courbe des surfaces drainées pour les trois bassins versants étudiés

Aucune méthode générique n'a encore été proposée pour définir le nombre de sous-bassins latéraux à prendre en compte. Les travaux de Lerat (2009) menés sur 49 bassins versants français montrent qu'en moyenne, une configuration avec deux sous-bassins latéraux est la plus performante. Prendre en compte plus d'affluents peut même dégrader les résultats, ce qui peut s'expliquer par l'aspect global du modèle hydrologique qui a été validé sur des bassins versants de taille moyenne à grande. Nous suggérons dans un premier temps de ne considérer que les

sous-bassins latéraux dont la surface représente au moins 10 % de la surface du bassin considéré (entre les stations de mesure amont et aval). Deux sous-bassins latéraux sont ainsi extraits pour les bassins du Tarn et de la Loue, un seul pour le bassin de l'Aveyron. Ces sous-bassins sont représentés sur la figure 4.22.

Le tableau 4.5 résume les caractéristiques de chacun des trois bassins et celles des sous-bassins latéraux considérés.

		Tarn	Aveyron	Loue
BV amont	Surface (km ²)	10.29	302.51	286.84
BV aval	Surface (km ²)	946.44	948.76	1263.34
BV considéré	Longueur (km)	81.81	100.24	71.46
	Surface (km ²)	554.48	579.14	404.18
BV latéral 1	PK (km)	23.44	33.06	27.35
	Surface (km ²)	262.79 (28.1 %)	67.11 (10.4 %)	382.42 (39.2 %)
BV latéral 2	PK (km)	62.21		12.21
	Surface (km ²)	118.88 (12.7 %)		105.67 (10.8 %)

TABLEAU 4.5 – Caractéristiques des bassins versants considérés, surface et localisation des sous-bassins latéraux (entre parenthèses, la surface relative des sous-bassins latéraux par rapport à la surface du bassin considéré)

Résultats d'identification

Nombre de sous-bassins latéraux

Nous proposons dans un premier temps d'analyser les performances du modèle TGR avec 0, 1 ou éventuellement 2 sous-bassins latéraux. Le tableau 4.6 présente les résultats, en terme de Nash, de l'identification croisée pour les différents cas étudiés.

Ces résultats montrent tout d'abord que le nombre de sous-bassins latéraux considérés a une influence sur les valeurs des paramètres obtenus lors de l'identification. Toutefois ces valeurs restent proches quel que soit le nombre de sous-bassins latéraux. Par ailleurs, on peut voir que les meilleurs résultats sont obtenus avec un seul sous-bassin pour le Tarn et aucun pour l'Aveyron. Quant à la Loue, le critère de Nash est amélioré lorsque l'on augmente le nombre de sous-bassins, mais cette amélioration est très faible avec l'introduction du deuxième sous-bassin.

Compte tenu de ces résultats, nous suggérons de prendre en compte les sous-bassins latéraux dont la surface représente au moins 25 % de la surface du bassin considéré. Finalement, nous retiendrons les configurations suivantes pour valider les performances du modèle TGR par comparaison avec deux autres modèles :

- 1 sous-bassin pour le Tarn
- 0 sous-bassin pour l'Aveyron
- 1 sous-bassin pour la Loue

Validation du modèle TGR

Afin de valider l'approche, le modèle TGR est comparé à deux autres modèles. Le premier est le modèle GR4H développé par le Cemagref Antony. Il s'agit d'un modèle hydrologique global de

BV Tarn								
Sous-bassins	Calage sur	τ_0	K_0	K_R	S	IGF	Nash Id	Nash Va
0	P ₁	16.97	0.00	58.49	400.50	1.05	83.64	83.43
	P ₂	18.88	0.40	56.04	687.32	1.11	85.26	81.94
1	P ₁	15.74	0.27	55.60	407.00	1.04	84.22	84.02
	P ₂	17.59	1.04	54.53	689.84	1.11	85.73	82.62
2	P ₁	17.78	0.33	56.10	409.97	1.05	84.15	83.98
	P ₂	16.90	2.30	54.60	690.23	1.11	85.66	82.56
BV Aveyron								
Sous-bassins	Calage sur	τ_0	K_0	K_R	S	IGF	Nash Id	Nash Va
0	P ₁	5.11	12.68	93.40	331.40	0.82	86.77	82.92
	P ₂	8.95	7.27	56.11	341.48	0.99	88.11	79.36
1	P ₁	5.04	12.48	95.30	332.47	0.82	86.77	82.74
	P ₂	7.90	8.09	56.21	341.36	0.99	88.18	79.38
BV Loue								
Sous-bassins	Calage sur	τ_0	K_0	K_R	S	IGF	Nash Id	Nash Va
0	P ₁	11.00	0.00	55.90	158.50	1.11	92.63	92.44
	P ₂	14.94	0.00	46.79	228.46	1.17	92.19	91.79
1	P ₁	10.94	0.00	55.50	158.83	1.12	92.76	92.64
	P ₂	13.94	0.06	48.58	209.17	1.15	92.63	92.32
2	P ₁	10.94	0.00	55.50	166.77	1.12	92.76	92.68
	P ₂	11.98	0.00	53.05	243.46	1.19	92.88	92.37

TABLEAU 4.6 – Résultats d'identification pour le modèle TGR sur les trois bassins étudiés pour 0, 1 ou 2 sous-bassins latéraux considérés (les critères de Nash sont donnés en %)

la même classe que le modèle GR3P présenté au chapitre 3, à quatre paramètres et fonctionnant au pas de temps horaire. Ce modèle est l'aboutissement d'une comparaison d'un grand nombre de modèles globaux visant à déterminer les structures les plus efficaces (Perrin, 2000; Mathevet, 2005). Le schéma de fonctionnement est présenté sur la figure 4.23. Le modèle GR4H simule le débit à l'exutoire d'un bassin versant à partir des données de pluie et ETP sur le bassin. Pour ce modèle, le débit amont n'est pas utilisé et le bassin versant considéré est celui désigné par BV aval dans le tableau 4.5. Les quatre paramètres à identifier sont les suivants :

- S , la capacité du réservoir de production,
- IGF , le paramètre contrôlant les échanges,
- R , la capacité du réservoir de routage,
- TB , le temps de base de l'hydrogramme unitaire.

Le deuxième modèle auquel est comparé le modèle TGR est un modèle très simple de type gain-premier ordre-retard. Ce modèle, nommé GKT, utilise le débit amont comme entrée, le propage par un premier ordre avec retard (atténuation et retard), puis le multiplie par un coefficient (le gain) pour simuler les apports hydrologique sur le bassin intermédiaire (entre les stations amont et aval). Un débit latéral constant est ensuite ajouté (ou retranché) au débit aval. Le modèle GKT fait ainsi l'hypothèse que les apports hydrologiques ont la même forme que le débit amont,

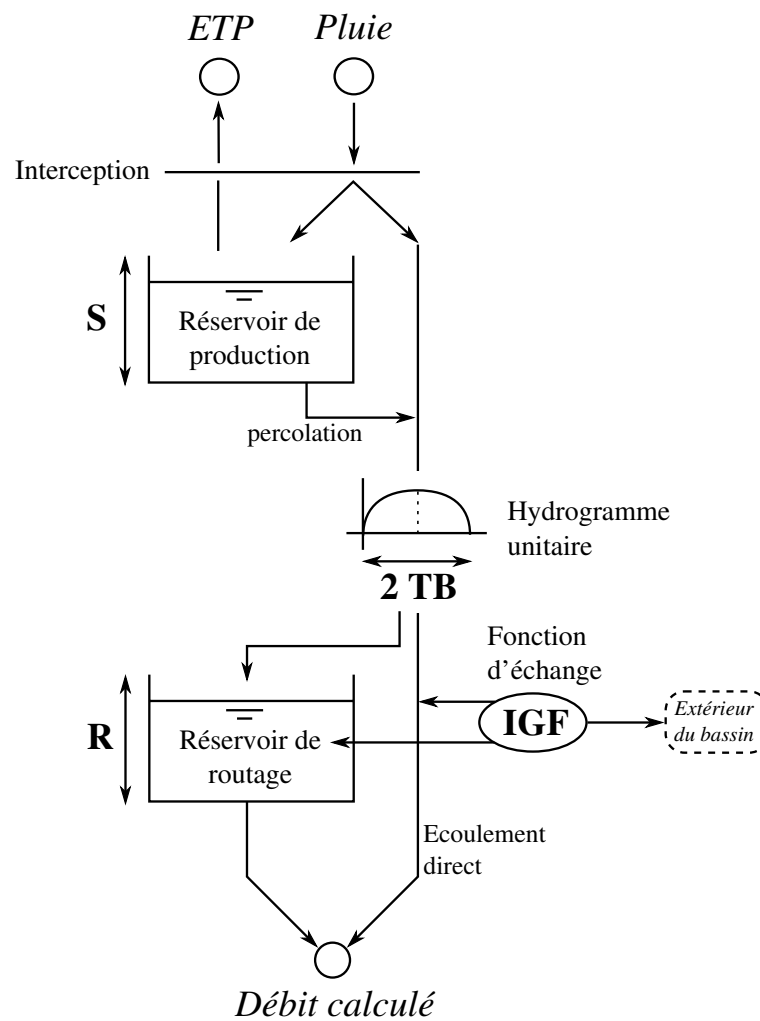


FIGURE 4.23 – Schéma de fonctionnement du modèle GR4H

ce qui peut être assez proche de la réalité dans la cas où la pluviométrie et la morphologie du bassin sont uniformes. Notons que les données de pluie et ETP ne sont pas prises en compte dans ce modèle. Les paramètres à identifier le modèle GKT sont :

- Q_l , le débit latéral constant,
- G , le gain multiplicatif,
- τ , le temps de retard,
- K , la constante de temps du premier ordre.

Les trois modèles comparés ont des structures fondamentalement différentes et n'utilisent pas les mêmes données d'entrée. La comparaison reste cependant intéressante pour les raisons suivantes.

- Le modèle GR4H est largement utilisé pour des applications hydrologiques réelles, et constitue donc une référence en modélisation hydrologique globale. Toutefois ce modèle reste peu adapté à des algorithmes d'automatique classiques tels que le filtre de Kalman.
- Le modèle GKT constitue peut-être l'approximation la plus simple de l'hydraulique d'un cours d'eau. Les apports intermédiaires dus aux pluies sont pris en compte à travers l'unique coefficient multiplicatif. Les données pluviométriques ne sont pas utilisées. Par contre, ce modèle linéaire est bien adapté aux outils de l'automatique.
- Le modèle TGR se situe en quelque sorte à mi-chemin entre les modèles GR4H et GKT. Par rapport à GR4H, le modèle TGR introduit une modélisation *a priori* plus fine de l'hydraulique du cours d'eau principal, mais ceci au prix d'une dégradation de l'hydrologie. Par rapport à GKT, le modèle TGR représente l'hydraulique de manière similaire, mais améliore la représentation de l'hydrologie du bassin intermédiaire. Enfin, la partie linéaire de ce modèle reste adaptée aux outils classiques de l'automatique.

Nous avons effectué l'identification de ces trois modèles par la procédure de calage-contrôle croisé sur les trois bassins versants considérés. Les paramètres obtenus sont rassemblés dans le tableau 4.7. Y sont également présentés les critères de Nash sur la période d'identification et sur la période de validation. La figure 4.24 présente les résultats de validation sur des événements représentatifs.

La première remarque à la vue de ces résultats est que les paramètres des trois modèles sont relativement consistants puisqu'ils varient assez peu suivant la période utilisée pour le calage. On peut remarquer que pour le bassin de la Loue, le paramètre K_0 du modèle TGR prend une valeur nulle. Si l'on regarde les très bonnes performances du modèle GKT sur ce même bassin, on comprend que les apports dus aux pluies sur le bassin intermédiaire sont fortement liés au débit amont puisqu'un simple gain multiplicatif permet de bien les représenter. Pour le modèle TGR, les paramètres K_0 et K_R ont pour but d'atténuer les débits amont et intermédiaire respectivement. Si ces débits ont globalement la même forme, ces deux paramètres jouent des rôles similaires. Afin de vérifier cette interprétation, nous avons identifié le modèle TGR en fixant le paramètre K_R à une valeur plus faible (par exemple 30), ce qui équivaut à une atténuation moindre du débit latéral. L'identification conduit alors à une valeur non nulle du paramètre K_0 (de l'ordre de 10), le débit amont étant alors plus atténué afin de compenser l'apport plus important du débit latéral. Le critère de Nash obtenu est très légèrement inférieur (de l'ordre de

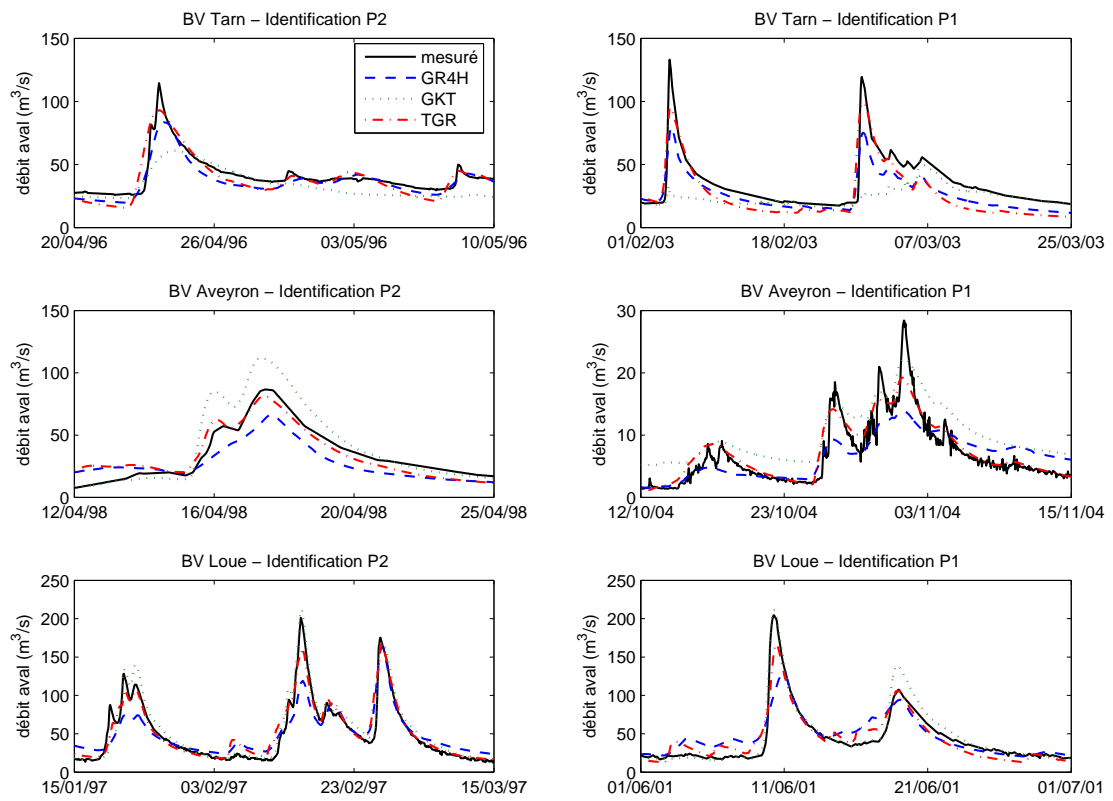


FIGURE 4.24 – Validation des trois modèles sur les trois bassins étudiés

BV Tarn						
GR4H	S	IGF	R	TB		Nash Id Nash Va
P ₁	291.16	0.27	195.98	19.11		88.81 77.49
P ₂	750.23	0.45	107.52	27.96		81.67 84.22
GKT	Q_l	G	τ	K		Nash Id Nash Va
P ₁	11.09	33.86	0.00	8.15		77.48 64.46
P ₂	10.12	31.66	20.37	1.94		72.83 77.02
TGR	τ_0	K_0	K_R	S	IGF	Nash Id Nash Va
P ₁	17.78	0.33	56.10	409.97	1.05	84.15 83.98
P ₂	16.90	2.30	54.60	690.23	1.11	85.66 82.56
BV Aveyron						
GR4H	S	IGF	R	TB		Nash Id Nash Va
P ₁	262.74	0.37	130.37	28.11		81.37 83.05
P ₂	302.12	0.39	74.77	31.34		84.88 78.59
GKT	Q_l	G	τ	K		Nash Id Nash Va
P ₁	3.93	2.43	27.22	0.99		80.70 73.03
P ₂	0.60	3.95	16.79	1.00		89.21 32.49
TGR	τ_0	K_0	K_R	S	IGF	Nash Id Nash Va
P ₁	5.04	12.48	95.30	332.47	0.82	86.77 82.74
P ₂	7.90	8.09	56.21	341.36	0.99	88.18 79.38
BV Loue						
GR4H	S	IGF	R	TB		Nash Id Nash Va
P ₁	153.29	1.70	81.41	34.92		84.70 85.33
P ₂	126.14	2.14	117.90	29.90		85.79 84.20
GKT	Q_l	G	τ	K		Nash Id Nash Va
P ₁	-4.71	2.66	4.79	1.00		93.66 94.70
P ₂	-4.68	2.74	5.37	1.00		94.86 93.49
TGR	τ_0	K_0	K_R	S	IGF	Nash Id Nash Va
P ₁	11.90	0.00	53.43	147.18	1.08	92.67 92.45
P ₂	12.00	0.00	52.46	232.30	1.19	92.80 92.38

TABLEAU 4.7 – Résultats d'identification pour les trois modèles sur les trois bassins étudiés (les critères de Nash sont donnés en %)

91 %), ce qui confirme que les paramètres K_0 et K_R sont en quelque sorte en concurrence dans ce cas précis.

La figure 4.25 présente les critères de Nash sur la période de validation pour les trois modèles et les trois bassins. On peut voir que les modèles GR4H et TGR sont sensiblement aussi performants sur les bassins du Tarn et de l'Aveyron. Sur ces deux bassins, le modèle GKT est bien moins performant sur l'ensemble des deux périodes. Sur le bassin de la Loue, les performances des modèles TGR et GKT sont bien meilleures que celles du modèle GR4H. De manière générale, sur ces trois bassins, le modèle TGR semble le plus performant pour reconstituer le débit aval.

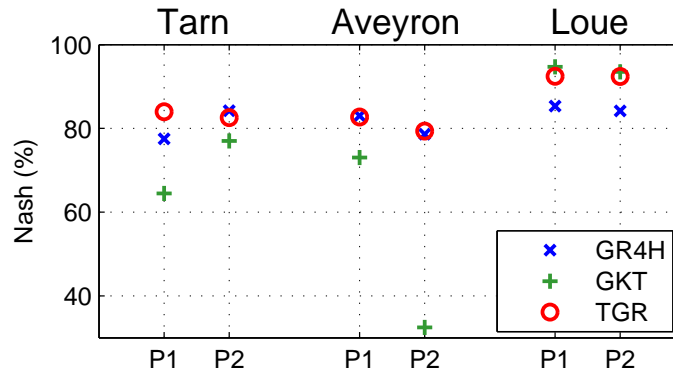


FIGURE 4.25 – Critère de Nash sur les résultats de validation pour les trois modèles sur les trois bassins étudiés

Conclusion

Cette application a permis dans un premier temps de choisir un critère pour déterminer le nombre de sous-bassins latéraux à prendre en compte dans le découpage spatial du bassin versant. Considérer moins de sous-bassins ne permet pas d'atteindre les meilleures performances, en considérer plus n'améliore pas significativement, voire dégrade, les performances.

Nous avons également pu vérifier que le modèle TGR proposé au chapitre 3 permet d'obtenir des performances au moins aussi bonnes que le modèle GR4H, référence en matière de modélisation hydrologique globale. L'avantage du modèle TGR, dans notre contexte, réside dans son adaptabilité aux outils classiques de l'automatique.

4.3 Synthèse du chapitre 4

Nous avons abordé dans ce chapitre l'étape d'identification des paramètres à travers trois applications sur des cas réels dans des contextes différents.

Pour la première application, le modèle utilisé est un modèle hydraulique physique simplifié du type LBLR (voir 3.2.3). Le contexte particulier de l'influence de la marée a permis de mettre en œuvre une méthode d'identification fréquentielle, évitant ainsi l'approximation basses fréquences du modèle LBLR et réduisant les temps de calcul. La validation a porté sur une mesure de hauteur d'eau en un point intermédiaire. Cette application a également permis d'illustrer les problèmes d'identifiabilité à travers une analyse de sensibilité sommaire. Ces problèmes ont pu être résolus par une réduction du modèle grâce à une approche adimensionnelle.

Dans la deuxième application, nous avons réalisé le contrôle en boucle ouverte d'une vanne d'un canal d'irrigation. Nous avons identifié les paramètres d'un modèle hydraulique de type fonction de transfert du premier ordre avec retard. Ce modèle a été amélioré par l'introduction d'un gain statique permettant de prendre en compte de manière efficace les variations du débits dues aux prises latérales réparties le long du bief. Le modèle a été validé par une expérience menée directement sur le canal réel. Le modèle s'est avéré efficace pour le contrôle en boucle ouverte de la vanne amont, le débit aval cible étant très bien reproduit.

Enfin, dans la troisième application, nous avons mis en œuvre le modèle intégré TGR développé dans le chapitre 3 sur trois bassins versants français : le Tarn, l'Aveyron et la Loue. Nous avons implémenté la procédure de calage-contrôle croisé avec échantillonnage préalable de l'espace des paramètres. Les résultats ont révélé les bonnes performances du modèle TGR, en comparaison avec le modèle GR4H et un modèle de type fonction de transfert simple ne prenant pas les données pluviométriques en entrée. Cette application a également permis d'établir un critère pour la décomposition spatiale du bassin intermédiaire proposée dans le chapitre 3.

Dans le chapitre suivant, nous mettrons en œuvre des algorithmes d'assimilation de données sur le modèle TGR pour la prévisions des crues sur le bassin du Serein, ainsi que pour la reconstitution de prélèvements sur le bassin de l'Adour.

4.4 Annexe : Calcul des matrices $\Gamma^{(i)}$ pour la version adimensionnelle du modèle de Sacramento

Les paramètres de départ sont les quatre paramètres adimensionnels F_0 , χ_0 , κ_0 et Y_X^* , et les deux paramètres de référence Q_R et X_R .

On définit la largeur adimensionnelle B^* et deux autres paramètres de référence par les relations suivantes :

$$B^* = 2 \frac{\kappa_0 - 1}{7/3 - \kappa_0} \quad , \quad k_R = (gB^{*2}F_0^2Q_R^3)^{1/5} \quad , \quad t_R = \frac{B^*Q_RX_R}{k_R^2} \quad (4.23)$$

Calcul de l'approximation de la courbe de remous

Le périmètre mouillé, la surface mouillée et la pente de frottement sous leur forme adimensionnelle sont calculés à l'aval du bief par :

$$P_X^* = \frac{P_X}{P_n} = \frac{B^* + 2Y_X^*}{B^* + 2} \quad , \quad A_X^* = \frac{A_X}{A_n} = Y_X^* \quad , \quad S_{fX}^* = \frac{S_f X}{S_b} = P_X^{*4/3} Y_X^{*-10/3} \quad (4.24)$$

Le nombre de Froude et la pente de la ligne d'eau à l'aval sont donnés par :

$$F_X = Y_X^{*-3/2} F_0 \quad , \quad S_X^* = \frac{S_X}{S_b} = \frac{1 - S_{fX}^*}{1 - F_X^2} \quad (4.25)$$

Ce qui permet de définir, pour chaque sous-bief, la longueur, la hauteur d'eau et la pente de la ligne d'eau :

$$\begin{aligned} X_1^* &= 1 - \frac{Y_X^* - 1}{\chi_0 S_X^*} & X_2^* &= 1 - X_1^* \\ Y_1^* &= Y_X^* - \chi_0 X_2^* S_X^* & Y_2^* &= \frac{Y_1^* + Y_X^*}{2} \\ S_1^* &= 0 & S_2^* &= S_X^* \end{aligned} \quad (4.26)$$

Caractéristiques du sous-bief i

A partir de la décomposition du bief en deux sous-biefs (le premier représentant la partie uniforme de l'écoulement, le deuxième la partie non uniforme), nous déduisons les caractéristiques

adimensionnelles et les paramètres de référence de chaque sous-bief.

Le périmètre mouillé adimensionnel s'écrit :

$$P_i^* = \frac{B^* + 2Y_i^*}{B^* + 2} \quad (4.27)$$

On en déduit les caractéristiques adimensionnelles :

$$F_i = Y_i^{*-3/2} \quad , \quad \chi_i = \frac{X_i^*}{Y_i^*} \chi_0 \quad , \quad \kappa_i = \frac{7}{3} - \frac{Y_i^*}{P_i^*} \left(\frac{7}{3} - \kappa_0 \right) \quad (4.28)$$

ainsi que les paramètres de référence :

$$t_{Ri} = X_i^* Y_i^* t_R \quad , \quad k_{Ri} = \frac{k_R}{Y_i^*} \quad (4.29)$$

Les deux variables μ et ν définies par les équations (3.12-3.13) sont écrites sous leur forme adimensionnelle :

$$\begin{aligned} \mu^* &= -2 \frac{X_i}{F_i^*} (1 - S_i^*) \\ \nu^* &= \frac{X_i}{F_i^*} [1 + \kappa_i - (1 + \kappa_i - (\kappa_i - 2) F_i^2) S_i^*] \end{aligned} \quad (4.30)$$

Valeurs propres

Les valeurs propres pour chaque sous-bief sont définies par la relation :

$$\lambda_{ji}^* = a_i^* + b_i^* s_i^* + (-1)^j \sqrt{a_i^{*2} + c_i^* s_i^* + d_i^* s_i^{*2}} \quad (4.31)$$

avec $s_i^* = t_{Ri} s$ et $a_i^* = \frac{F_i^2}{1-F_i^2} \frac{\nu_i^*}{2}$, $b_i^* = \frac{F_i^2}{1-F_i^2}$, $c_i^* = \frac{F_i^2}{1-F_i^2} \left(\frac{F_i^2}{1-F_i^2} \nu_i^* - \mu_i^* \right)$, $d_i^* = \frac{F_i^2}{(1-F_i^2)^2}$.

Ces expressions correspondent à celles développées pour le modèle LLR dans la partie 3.2 à ceci près que la pente S_i^* n'est ici pas nécessairement nulle.

Matrice $\Gamma^{(i)}$

Pour un bief donné caractérisé par la matrice Γ , on définit la forme adimensionnelle de Γ par :

$$\begin{pmatrix} q^*(x^*, s^*) \\ y^*(x^*, s^*) \end{pmatrix} = \Gamma(x^*, s^*) \begin{pmatrix} q_0^*(s^*) \\ y_0^*(s^*) \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

où $x^* = \frac{x}{X_R}$, $q^* = \frac{q}{Q_R}$ et $y^* = \frac{k_R}{Q_R} y$.

Pour chaque sous-bief, la matrice $\Gamma^{(i)*} = (\gamma_{jk}^{(i)*})$ est donnée par les relations suivantes :

$$\Gamma^{(i)*} = \frac{1}{\lambda_{2i}^* - \lambda_{1i}^*} \begin{pmatrix} \lambda_{2i}^* e^{\lambda_{1i}^* x_i^*} - \lambda_{1i}^* e^{\lambda_{2i}^* x_i^*} & -s_i^* (e^{\lambda_{2i}^* x_i^*} - e^{\lambda_{1i}^* x_i^*}) \\ \frac{\lambda_{1i}^* \lambda_{2i}^*}{s_i^*} (e^{\lambda_{2i}^* x_i^*} - e^{\lambda_{1i}^* x_i^*}) & \lambda_{2i}^* e^{\lambda_{2i}^* x_i^*} - \lambda_{1i}^* e^{\lambda_{1i}^* x_i^*} \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

On en déduit la matrice $\Gamma^{(i)} = \left(\gamma_{jk}^{(i)} \right)$:

$$\begin{aligned} \gamma_{11}^{(i)} &= \gamma_{11}^{(i)*} & \gamma_{12}^{(i)} &= k_R \gamma_{12}^{(i)*} \\ \gamma_{21}^{(i)} &= \frac{1}{k_R} \gamma_{21}^{(i)*} & \gamma_{22}^{(i)} &= \gamma_{22}^{(i)*} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Ainsi, les matrices $\Gamma^{(i)}$ sont entièrement déterminées à partir des quatre paramètres adimensionnels F_0 , χ_0 , κ_0 et Y_X^* , et de deux paramètres de référence Q_R et X_R fixés *a priori*.

Chapitre 5

Observateurs pour la commande

Au cours des deux chapitres précédents, nous avons élaboré une méthodologie de synthèse d'un modèle intégré hydraulique-hydrologie et proposé une méthode d'identification de ses paramètres. Dans ce chapitre, nous mettons en œuvre un algorithme d'assimilation de données du type filtre de Kalman pour rendre le modèle intégré opérationnel, notamment dans les contextes présentés au chapitre 1 de prévision des crues et de gestion des étiages.

5.1 Cadre théorique

Le modèle développé dans le chapitre 3 possède une partie linéaire (LRK) et une partie non linéaire (GRK). Parmi les différentes méthodes d'assimilation de données présentées dans le chapitre 2, nous retiendrons le filtre de Kalman que nous proposons d'appliquer sur la partie linéaire LRK. Le filtre de Kalman présente l'avantage d'être facile à mettre en œuvre, ce qui est non négligeable pour une utilisation en contexte opérationnel. Il permet en outre la synthèse d'observateurs d'états que nous utiliserons pour la reconstitution de prélèvements.

5.1.1 Description du filtre de Kalman

Le filtre de Kalman (Kalman, 1960) s'applique à un système linéaire invariant discrétisé décrit par les équations suivantes :

$$x(k) = A x(k-1) + B u(k-1) + w(k-1) \quad (5.1)$$

$$y(k) = C x(k) + v(k) \quad (5.2)$$

où k est l'instant discrétisé, x l'état interne du système, u l'entrée et y la sortie. Les variables x , u et y sont des vecteurs, A , B et C des matrices de dimensions correspondantes. Les variables aléatoires w et v représentent le bruit de process et le bruit de mesure respectivement. Nous supposerons qu'ils sont indépendants et décrits par une loi de probabilité normale de matrice de covariance Q pour w et R pour v .

$$Q = E(ww^T) \quad (5.3)$$

$$R = E(vv^T) \quad (5.4)$$

Les matrices Q et R traduisent la confiance que l'on peut avoir dans les différents états du système et les mesures.

Le filtre de Kalman se décompose en deux étapes : la prédiction et la mise à jour. La prédiction permet d'estimer l'état du système x à l'instant k , connaissant l'entrée u et l'état estimé à l'instant $k-1$. La mise à jour permet de corriger l'estimation de prédiction à partir de la mesure de y à l'instant k . Les équations suivantes traduisent les étapes de prédiction (équation (5.5)) et de mise à jour (équations (5.6-5.7)) :

$$\hat{x}(k|k-1) = A \hat{x}(k-1|k-1) + B u(k-1) \quad (5.5)$$

$$\tilde{y}(k) = y(k) - C \hat{x}(k|k-1) \quad (5.6)$$

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k) \tilde{y}(k) \quad (5.7)$$

où $\hat{x}(k|k-1)$ représente l'estimation de l'état à l'instant k connaissant les entrées et sorties mesurées jusqu'à l'instant $k-1$, $\hat{x}(k|k)$ l'estimation de l'état à l'instant k connaissant les entrées et sorties mesurées jusqu'à l'instant k , $\tilde{y}(k)$ l'erreur (ou innovation) entre la mesure à l'instant k et la sortie estimée à partir de $\hat{x}(k|k-1)$ et $K(k)$ une matrice appelée « Gain de Kalman ».

Le gain de Kalman est choisi de façon à minimiser la covariance $P(k|k)$ de l'erreur $e(k|k) = x(k) - \hat{x}(k|k)$. On dit alors que le gain de Kalman est optimal. La matrice $K(k)$ est obtenue par l'équation (Brown et Hwang, 1992) :

$$K(k) = P(k|k-1)C^T (CP(k|k-1)C^T + R)^{-1} \quad (5.8)$$

où $P(k|k-1) = E[e(k|k-1)e(k|k-1)^T]$ est la matrice de covariance de l'erreur de prédiction $e(k|k-1) = x(k) - \hat{x}(k|k-1)$.

Le calcul de $P(k|k-1)$ et de $P(k|k)$ se fait alors comme suit :

$$P(k|k-1) = AP(k-1|k-1)A^T + Q \quad (5.9)$$

$$P(k|k) = (I - K(k)C)P(k|k-1) \quad (5.10)$$

Pour les applications présentées dans la suite, nous ferons l'hypothèse supplémentaire d'un gain de Kalman invariant. Cette hypothèse permet de calculer la matrice K *a priori*, réduisant ainsi les temps de calcul lors de l'application du filtre de Kalman (5.5-5.7). On définit alors la matrice P de covariance de l'erreur, solution de l'équation de Riccati :

$$P = APA^T + Q \quad (5.11)$$

Enfin, le gain de Kalman K est obtenu par

$$K = PC^T(CPC^T + R)^{-1} \quad (5.12)$$

5.1.2 Application au modèle TGR

Pour appliquer le filtre de Kalman au modèle TGR, il convient d'abord d'écrire les équations d'état du sous-modèle LRK afin de déterminer les matrices A , B et C . Pour simplifier le système, nous supposons que les apports dus aux pluies se décomposent en un apport latéral ponctuel et un apport latéral uniformément distribué sur tout le bief. Le principe reste le même avec plusieurs apports latéraux diffus ou ponctuels. Nous supposons en outre que le système est composé de N bassins intermédiaires en série, et que l'on dispose des mesures de débit à l'amont et à l'aval de chaque bassin intermédiaire ainsi que des mesures de pluies et ETP sur chaque bassin (figure 5.1).

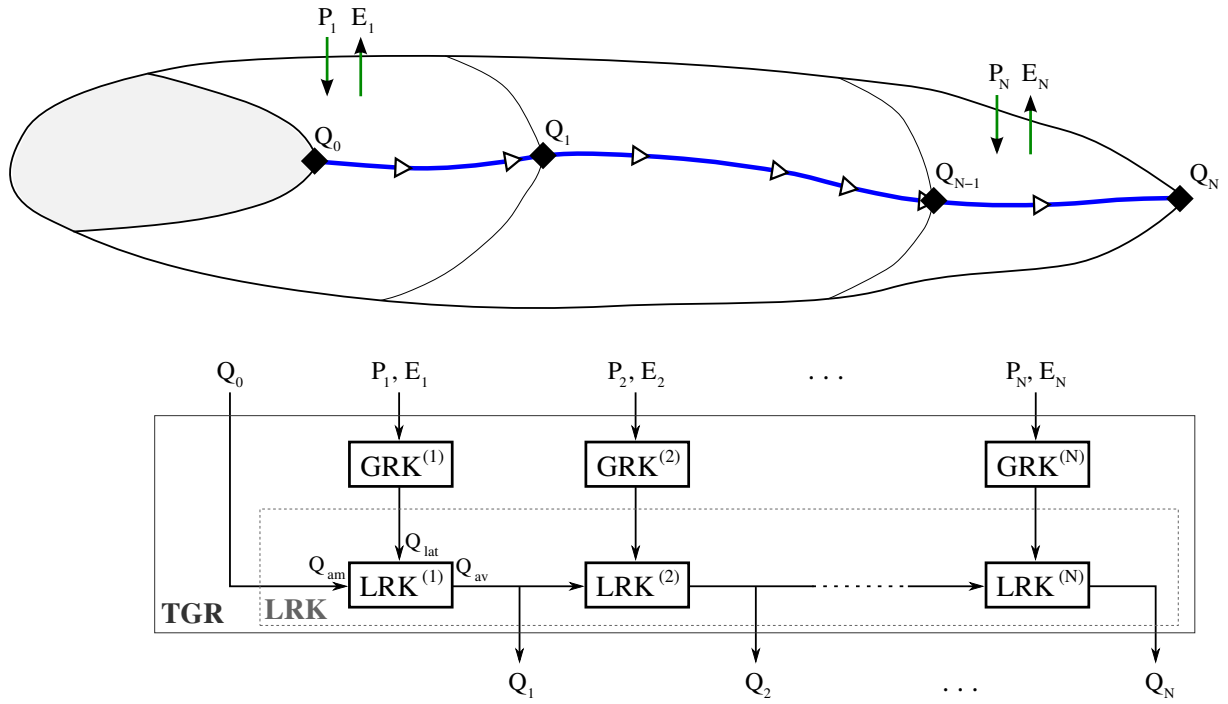


FIGURE 5.1 – Schéma du modèle TGR pour un système composé de N bassins intermédiaires en série

On définit alors, pour le bassin i , trois nouveaux paramètres déterminés par l'analyse de la courbe des surfaces drainées :

- $S_P^{(i)}$ ($0 < S_P^{(i)} < 1$) la surface drainée par l'affluent principal rapportée à la surface du bassin intermédiaire,
- $S_U^{(i)}$ ($S_U^{(i)} = 1 - S_P^{(i)}$) la surface du bassin complémentaire rapportée à la surface du bassin intermédiaire,
- $x_P^{(i)}$ ($0 < x_P^{(i)} < 1$) l'abscisse de l'injection latérale ponctuelle rapportée à la longueur du bief.

Entrées, sorties et paramètres

Les entrées du modèle LRK sont données par les sorties du modèle GRK. Le vecteur d'entrée du modèle LRK s'écrira alors :

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N+1} \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} u_1 = Q_0 \\ u_2 = GRK^{(1)}(P_1, E_1) \\ \vdots \\ u_{N+1} = GRK^{(N)}(P_N, E_N) \end{cases} \quad (5.13)$$

où Q_0 représente le débit amont, P_i et E_i les pluies et ETP du bassin i .

Les sorties sont les débits Q_i aux points intermédiaires, c'est-à-dire à l'exutoire de chaque bassin intermédiaire, soit :

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} y_1 = Q_1 \\ y_2 = Q_2 \\ \vdots \\ y_N = Q_N \end{cases} \quad (5.14)$$

Pour le bassin i , les paramètres du modèle LRK sont $\tau_0^{(i)}$ et $K_0^{(i)}$ le retard et la constante de premier ordre du transfert de débit amont, $K_R^{(i)}$ la constante du routage bassin, $\tau_P^{(i)}$ et $K_P^{(i)}$ le retard et la constante de premier ordre du transfert du débit latéral ponctuel, et $K_U^{(i)}$ la constante de premier ordre du transfert du débit latéral diffus. Rappelons que seuls les paramètres $\tau_0^{(i)}$, $K_0^{(i)}$ et $K_R^{(i)}$ sont calés lors de l'étape d'identification. Les autres sont calculés à partir de $\tau_0^{(i)}$, $K_0^{(i)}$ et $x_P^{(i)}$ (voir chapitre 3).

Schéma structurel

La figure 5.2 présente le schéma structurel du modèle LRK pour N bassins en série. Les boîtes $\tau^{(i)}$ correspondent à un retard pur, les boîtes $K^{(i)}$ à un premier ordre et les boîtes $S^{(i)}$ à un gain multiplicatif. Les éléments de l'état interne x sont représentés, avec p_i l'indice du premier élément correspondant au sous-bassin i .

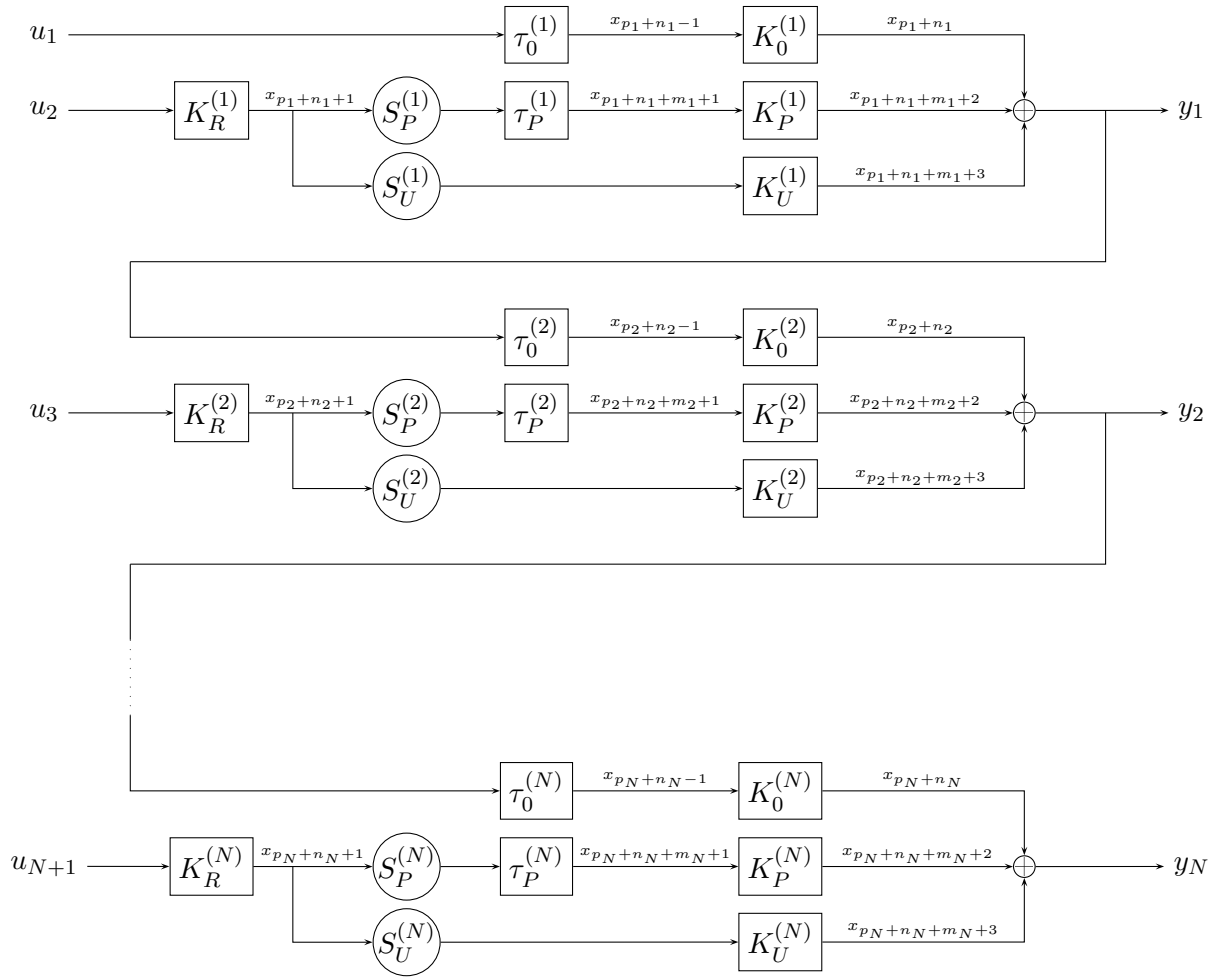
Le modèle étant linéaire, le nombre d'états internes est constant au cours du temps. Il est déterminé par la discrétisation des retards $\tau_0^{(i)}$ et $\tau_P^{(i)}$ pour chaque bassin intermédiaire et le nombre d'équations du premier ordre traduites par les paramètres $K_0^{(i)}$, $K_R^{(i)}$, $K_P^{(i)}$ et $K_U^{(i)}$.

Equations d'état

Le modèle est discrétisé au pas de temps Δt . Les paramètres suivants sont introduits pour simplifier les équations :

$$\alpha_i = \frac{\Delta t}{K_0^{(i)}}, \quad \beta_i = \frac{\Delta t}{K_R^{(i)}}, \quad \gamma_i = \frac{\Delta t}{K_P^{(i)}}, \quad \delta_i = \frac{\Delta t}{K_U^{(i)}} \quad (5.15)$$

$$n_i = E\left(\frac{\tau_0^{(i)}}{\Delta t}\right), \quad m_i = E\left(\frac{\tau_P^{(i)}}{\Delta t}\right) \quad (5.16)$$

FIGURE 5.2 – Modèle LRK pour N sous-bassins

Avec ces notations, on peut écrire :

$$\begin{cases} p_1 = 1 \\ p_{i+1} = p_i + n_i + m_i + 3 \end{cases}, \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad (5.17)$$

Le premier état de chaque sous-bassin correspond au débit amont retardé d'un pas de temps. Il est donné par :

$$\begin{cases} x_{p_1}(k+1) = u_1(k) \\ x_{p_{i+1}}(k+1) = x_{p_i+n_i}(k) + x_{p_i+n_i+m_i+2}(k) + x_{p_i+n_i+m_i+3}(k) \end{cases}, \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad (5.18)$$

Les états suivants traduisent les retards et les transferts de type premier ordre et sont décrits par :

$$\begin{aligned}
 x_{p_i+1}(k+1) &= x_{p_i}(k) \\
 &\vdots \\
 x_{p_i+n_i-1}(k+1) &= x_{p_i+n_i-2}(k) \\
 x_{p_i+n_i}(k+1) &= (1 - \alpha_i)x_{p_i+n_i}(k) + \alpha_i x_{p_i+n_i-1}(k) \\
 x_{p_i+n_i+1}(k+1) &= (1 - \beta_i)x_{p_i+n_i+1}(k) + \beta_i u_{i+1}(k) \\
 x_{p_i+n_i+2}(k+1) &= S_P^{(i)} x_{p_i+n_i+1}(k) \\
 &\vdots \\
 x_{p_i+n_i+m_i+1}(k+1) &= x_{p_i+n_i+m_i}(k) \\
 x_{p_i+n_i+m_i+2}(k+1) &= (1 - \gamma_i)x_{p_i+n_i+m_i+2}(k) + \gamma_i x_{p_i+n_i+m_i+1}(k) \\
 x_{p_i+n_i+m_i+3}(k+1) &= (1 - \delta_i)x_{p_i+n_i+m_i+3}(k) + S_U^{(i)} \delta_i x_{p_i+n_i+1}(k)
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Ces équations d'état permettent d'écrire les matrices A , B et C décrivant la dynamique du système par les équations (5.1-5.2).

5.1.3 Observateurs d'état

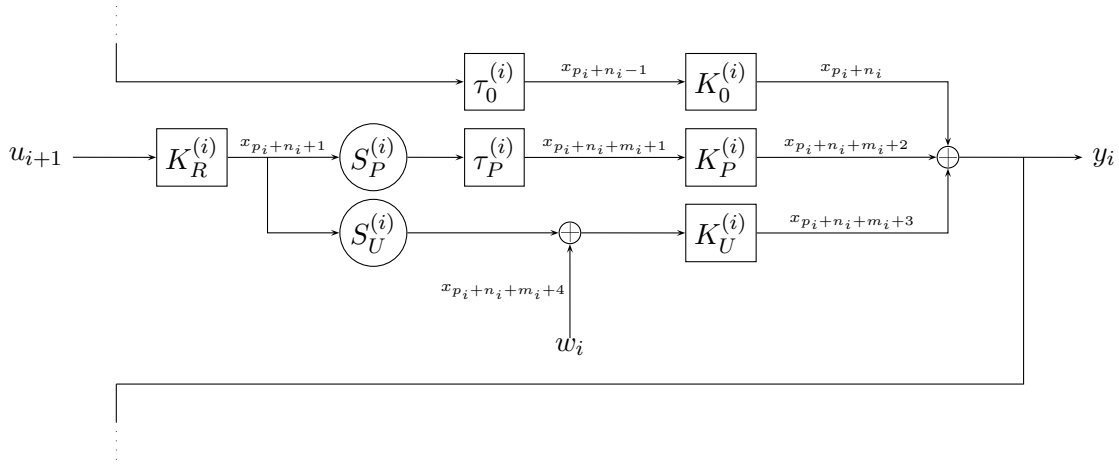
L'algorithme de Kalman permet d'attribuer l'erreur de prédiction aux différents états et mesures suivant des pondérations décrites par les matrices Q et R . La correction est alors portée sur les états en lesquels on a le moins confiance.

Ainsi, dans le cas où le modèle est parfait, il est possible de créer un nouvel état représentant une perturbation seule responsable de l'erreur de prédiction. Avec une matrice Q adéquate, l'algorithme permet de corriger uniquement cet état. La perturbation responsable de l'écart entre la mesure et la simulation est alors reconstituée. Bien évidemment, il est également possible de reconstituer une perturbation tout en corrigeant simultanément d'autres états internes en lesquels on n'a pas une confiance absolue.

Ce principe peut être appliqué pour reconstituer différents transferts non jaugés, tels que les prélèvements pour l'irrigation au cours de la saison sèche, ou les échanges entre la nappe et la rivière. Dans la partie 5.3, nous nous intéresserons aux prélèvements pour l'irrigation que nous considérerons comme un débit latéral uniformément distribué sur tout le bief. La figure 5.3 indique la position où la perturbation w_i est injectée.

Par ailleurs, pour intégrer la perturbation au système, il faut disposer de son équation d'état. Il peut arriver que l'on connaisse les lois d'évolution de la perturbation, lois que l'on peut retranscrire en équations d'état. Ces équations permettent d'anticiper l'évolution de la perturbation et ainsi d'en diminuer les corrections. Toutefois, dans la plupart des cas, l'évolution de la perturbation reste inconnue. En première approximation, on peut la supposer constante d'un pas de temps au suivant (équation (5.20)). Cette hypothèse n'est pas très restrictive dans la mesure où nous travaillons au pas de temps horaire.

$$w(k+1) = w(k) \tag{5.20}$$

FIGURE 5.3 – Modèle LRK avec perturbation pour le sous-bassin i

5.2 Prévision des crues

5.2.1 Contexte, objectif

Comme précisé dans le chapitre 1, la thèse se situe dans un contexte de gestion à court terme. Dans le cadre de la gestion des crues, il s'agit d'anticiper le plus tôt possible les situations de crise, généralement définies en terme de débit par le dépassement d'un seuil d'alerte. Cette anticipation est rendue possible par l'utilisation en temps réel de modèles d'écoulements dans le bassin versant, traduisant essentiellement la transformation de la pluie en un débit à l'exutoire. Ces modèles permettent d'établir une prévision du débit à des horizons plus ou moins longs (de quelques heures à quelques jours). Il doivent en outre être capables d'intégrer les mesures de pluies et débits en temps réel afin d'affiner la qualité de la prévision ; c'est le principe de l'assimilation de données.

Nous avons vu dans les chapitres 2 et 3 qu'il existe de nombreux modèles hydrologiques pour la prévision des crues, allant de modèles complexes (physiques distribués) à des modèles très simples (conceptuels globaux). Les premiers sont souvent délicats à mettre en œuvre (algorithmes numériques parfois instables, volumes importants de données à traiter, difficultés de calage des paramètres), ce qui limite leur utilisation par les gestionnaires qui préfèrent se tourner vers des approches plus simples, plus robustes et manipulables par des personnes non expertes. Toutefois, ces approches simples restent perfectibles, notamment avec les avancées informatiques qui permettent d'affiner la représentation des phénomènes tout en respectant les contraintes de l'opérationnel, ce qui a donné naissance aux approches hybrides de type semi-distribuées.

Le modèle TGR développé dans la thèse se situe dans cette classe de modèles. Il présente un module hydrologique conceptuel globalisé par sous-bassins, couplé à un module hydraulique de type physique simplifié, ce qui le place à mi-chemin des modèles tels que MIKE11 (Havnø *et al.*, 1995) utilisant des algorithmes numériques pour le module hydraulique et des modèles tels que DBM (Young, 2002; Romanowicz *et al.*, 2006) qui utilisent une approche conceptuelle pour l'hydraulique.

Le modèle TGR a initialement été développé pour la gestion des étiages et la commande automatique des vannes de barrage. Cependant, il semble répondre aux contraintes exigées par la prévision des crues. C'est ce que nous proposons de vérifier dans cette partie, à travers une étude comparative avec le modèle GR3P (Tangara, 2005). Le modèle TGR sera d'abord calé et validé à partir des données disponibles. Nous appliquerons ensuite le filtre de Kalman pour ce cas particulier dans le but d'utiliser le modèle pour la prévision des débits.

Le modèle GR3P a été choisi comme modèle de référence car c'est celui qui a été mis en place de façon opérationnelle à la DIREN¹ Ile-de-France pour la prévision des crues (Cemagref, 2005). Il s'agit d'un modèle hydrologique horaire global de type pluie-débit, ce qui signifie qu'il permet d'obtenir le débit horaire à l'exutoire d'un bassin versant à partir des pluies et ETP moyennes sur le bassin au pas de temps horaire. Par opposition à un modèle hydrologique distribué, ce modèle n'a pas vocation à représenter les effets de la spatialisation de la pluie. Il est construit à partir de seulement trois paramètres à identifier, ce qui lui confère une bonne stabilité et une bonne robustesse. Le modèle GR3P a été adapté pour la prévision avec une méthode de mise à jour simple qui lui permet d'exploiter directement les débits observés à l'aval afin de corriger l'état interne du système (Tangara, 2005). La figure 5.4 présente le schéma de fonctionnement du modèle ainsi que la méthode de mise à jour.

Le modèle GR3P permet de fournir une référence sur la prévision obtenue avec un modèle hydrologique seul. On pourra ainsi évaluer le gain en performance de l'intégration d'une composante hydraulique et l'utilisation d'une méthode plus élaborée de mise à jour des états internes du système.

5.2.2 Méthodologie d'analyse du modèle de prévision

Avant de décrire le système considéré et l'application du modèle TGR pour la prévision des crues, nous décrivons la méthodologie adoptée pour évaluer les performances en terme de prévision.

Scénarios de pluies futures

L'estimation des précipitations constitue une information primordiale dans la prévision des crues. Par rapport à un instant de prévision, cette information peut être de deux types : les précipitations passées et les précipitations futures. Lorsqu'un événement pluvieux frappe un bassin versant, il faut un certain temps pour que l'eau qui atteint la surface du bassin s'écoule jusqu'à son exutoire. C'est ce que l'on appelle le temps de réponse du bassin, défini par l'intervalle de temps séparant le centre de gravité de la pluie nette au pic de crue. Ainsi, à un instant donné, les précipitations passées peuvent suffire pour prévoir le débit à l'exutoire jusqu'à un horizon de prévision de l'ordre du temps de réponse du bassin. Jusqu'à cet horizon, les précipitations futures n'auront qu'une faible influence sur le débit aval. Si l'on souhaite établir des prévisions à un horizon supérieur au temps de réponse, les précipitations passées auront une influence décroissante sur la prévision du débit aval qui dépendra alors essentiellement des pluies futures, comme illustré sur la figure 5.5.

1. Direction Régionale de l'Environnement

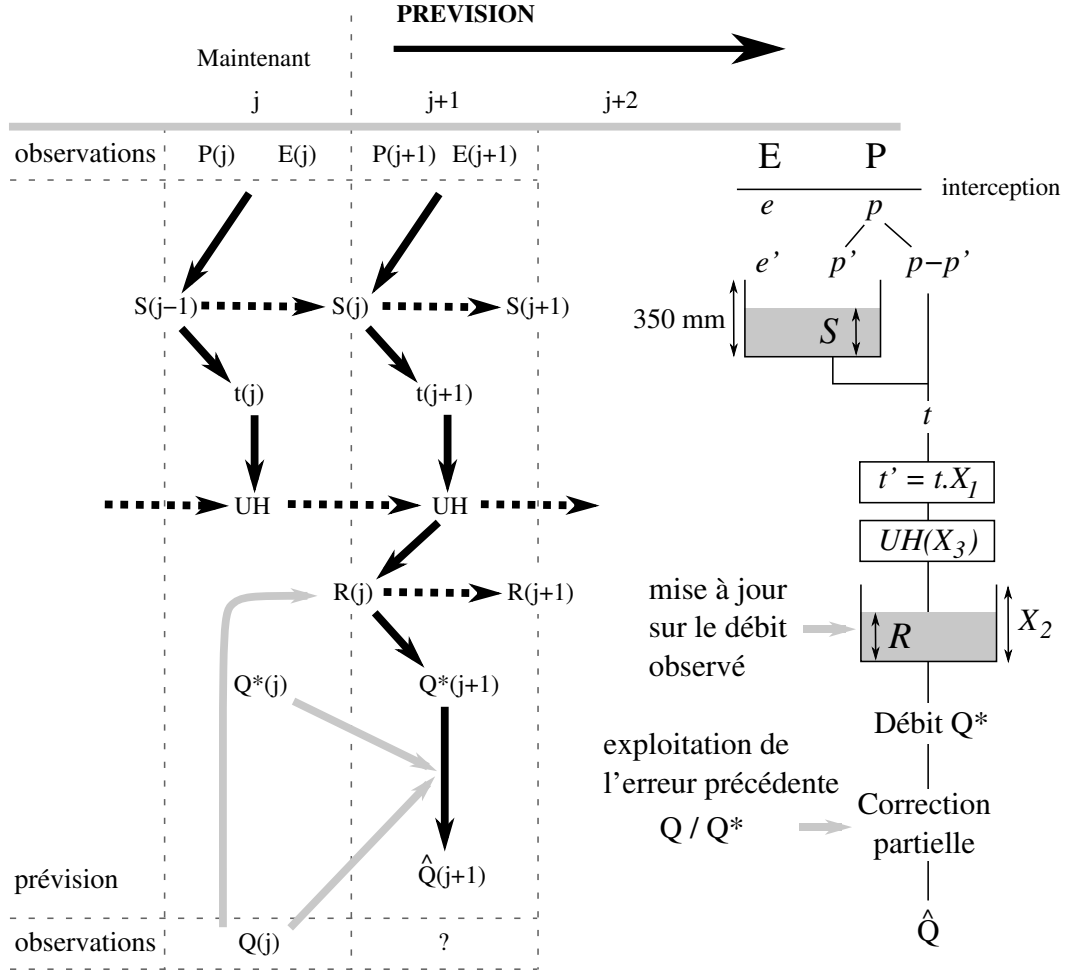


FIGURE 5.4 – Schéma de fonctionnement du modèle GR3P et méthode de mise à jour

Lorsque l'horizon ciblé dépasse le temps de réponse du bassin, la prévision des crues ne peut se faire sans la prévision quantitative des pluies futures. La prévision des pluies futures constitue un problème à part entière qui ne sera pas traité dans cette thèse. En conditions opérationnelles, la DIREN dispose actuellement de prévisions quantitatives de pluie de Météo-France. Il aurait été intéressant d'utiliser des historiques de ces prévisions afin d'évaluer le modèle dans des conditions les plus proches possible des conditions opérationnelles. Cependant, ne disposant pas de tels historiques, nous avons opté pour deux scénarios simples de pluies futures, faciles à mettre en œuvre sans élaboration d'hypothèses très spécifiques sur les pluies. Ces deux scénarios sont les suivants.

- Scénario P0 : pluies futures nulles. Cette hypothèse, qui représente un scénario défavorable notamment pour des horizons de prévision supérieurs au temps de réaction du bassin, est utilisé en conditions opérationnelles en l'absence de prévision de pluie.
- Scénario PP : pluies futures parfaites. Dans ce scénario, on suppose que les prévisions de pluie sont parfaites, c'est à dire que les pluies réellement tombées sont celles prévues. Il s'agit d'un scénario idéal, irréaliste en conditions réelles, mais permettant d'avoir une évaluation des performances du modèle sans les bruyers par la méconnaissance des pluies futures.

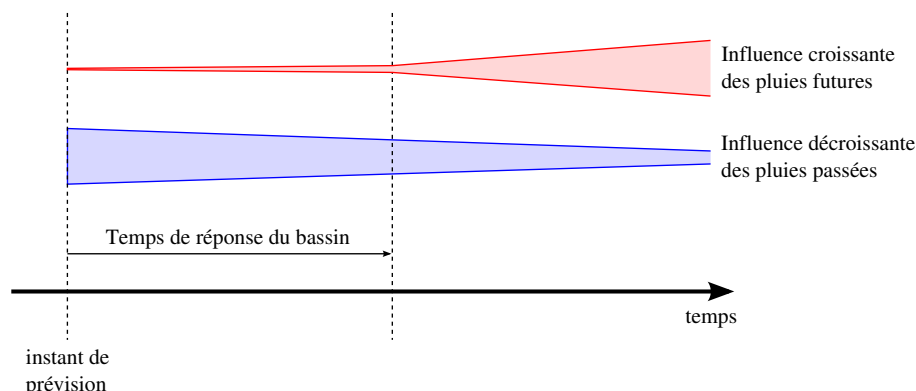


FIGURE 5.5 – Illustration de l'influence des pluies passées et futures sur la prévision du débit à l'exutoire, par rapport au temps de réponse du bassin

Les performances du modèle devront être quasiment identiques avec les deux scénarios tant que l'horizon de prévision ne dépasse pas le temps de réaction du bassin. Au-delà, le scénario de pluies futures nulles devrait produire de moins bons résultats. Les performances obtenues avec le scénario de pluies parfaites devraient correspondre aux meilleures performances que l'on pourra obtenir avec le modèle choisi. Ceci nous permettra de comparer les performances du modèle TGR avec celles du modèle GR3P. En outre, l'utilisation des deux scénarios permet d'obtenir un faisceau de prévision permettant d'appréhender l'influence de l'incertitude sur la prévision des pluies futures.

Critères d'évaluation

Il existe de nombreux critères permettant d'évaluer les performances d'un modèle utilisé pour la prévision des crues. Pour chaque station hydrométrique, la DIREN a défini des seuils de passage en vigilance permettant de lancer des actions de protection lorsqu'ils sont franchis. Le modèle doit être capable de détecter ces dépassements de seuils au plus tôt afin d'anticiper au mieux les actions prévues. Un certain nombre de critères permettent d'évaluer la capacité du modèle à détecter les dépassements de seuils (Bontron, 2004). On peut citer :

- la probabilité de détection, représentant la probabilité qu'une alerte ait été prévue lorsqu'elle a effectivement lieu,
- le taux de fausses alertes, représentant la probabilité d'annoncer une alerte alors qu'elle n'aura pas lieu,
- l'indice de succès critique qui représente les succès par rapport à ce qui a été prévu (alerte prévue et ayant eu lieu) mais aussi ce qui aurait dû l'être (alerte non prévue mais ayant eu lieu).

Cependant, le but de cette application dans le cadre de la thèse n'est pas tant de faire une étude de prévision sur le cas du Serein que d'étudier l'applicabilité du modèle TGR pour la prévision des crues. Ainsi, pour analyser les performances du modèle, nous nous contenterons de calculer, pour chaque horizon de prévision, l'erreur quadratique moyenne entre les débits observés et les

débits prévus. Le critère utilisé sera défini par :

$$\text{RMSE}(L) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_k (Q_{obs}(k+L) - Q_{prev}(k+L))^2} \quad (5.21)$$

où L représente l'horizon de prévision, k l'instant de prévision, N le nombre de pas de temps, Q_{obs} le débit observé et Q_{prev} le débit prévu.

La courbe $\text{RMSE}(L)$ sera tracée pour les modèles TGR et GR3P et sera utilisée pour comparer les performances de ces deux modèles.

Notons que pour calculer le critère, nous nous restreindrons aux débits supérieurs à un seuil de crue Q_{95} défini par la DIREN et correspondant au quantile 0.95 de la courbe des débits horaires classés (probabilité de 95 % que le débit soit inférieur à Q_{95}).

5.2.3 Le système

Le bassin versant du Serein

Le bassin versant du Serein, affluent de la Seine, est composé de formations géologiques très différentes (marnes à l'amont et formation calcaires à l'aval). Cette particularité est à l'origine d'un comportement hydrologique complexe. La formation des crues sur le Serein est notamment influencée par la variabilité spatiale de la pluie, mais aussi probablement par d'autres phénomènes tels que les échanges avec le Karst sur la partie médiane du bassin. Ainsi, l'historique des données hydrométriques sur ce bassin permet d'extraire deux types de crues distincts, caractérisés par une atténuation ou une amplification de la crue lors de sa propagation entre l'amont et la confluence avec l'Yonne. Ces deux comportements rendent la prévision des débits à l'aval difficile par un modèle hydrologique global car il n'est pas possible d'extrapoler l'évolution de la crue en fonction des données à l'amont.

L'application du modèle TGR sur ce bassin versant s'inscrit dans le cadre d'une étude de la DIREN Ile-de-France visant à l'amélioration de ses modèles de prévision des crues sur les sous-bassins versants amont du bassin de la Seine. L'objectif de l'étude était, entre autres, de développer pour ces bassins des modèles de prévision des crues aussi fiables que possible sur des horizons de prévision aussi grands que possible. Parmi les bassins étudiés, le bassin versant du Serein présente des problèmes de prévision particuliers qui ont motivé le développement d'un modèle spécifique du type TGR, en vue d'améliorer la prévision à court terme (jusqu'à un horizon de prévision de 72 h).

Stations de mesure, données disponibles

Quatre stations hydrométriques nous permettent de disposer des débits en différents points du cours d'eau. L'utilisation de ces données à travers la composante hydraulique du modèle TGR devrait permettre d'anticiper le régime particulier de la crue, et éventuellement de corriger les erreurs de modélisation par le recalage en temps réel des états internes. Les quatre stations sont : Bierre-lès-Sémur à l'amont, Beaumont à l'aval, et deux stations intermédiaires Dissangis

et Chablis. Selon la méthodologie du modèle TGR, ces stations permettent de définir quatre sous-bassins versants, comme illustré sur la figure 5.6.

Les données disponibles pour ces stations sont les débits horaires sur la période de 1994 à 2009 pour les trois stations amont, et de fin 1997 à 2009 pour la station de Beaumont. Le tableau 5.1 rassemble les stations hydrométriques utilisées, la superficie des bassins versants drainés et les périodes de disponibilité des données.

Code	Station	Superficie du bassin (km ²)	Disponibilité débits horaires
H2322010	Bierre-les-Semur	267	01/01/1994 - 27/02/2009
H2332020	Dissangis	643	15/03/1994 - 27/02/2009
H2342020	Chablis	1120	01/01/1994 - 28/02/2009
H2342030	Beaumont	1337	05/11/1997 - 28/02/2009

TABLEAU 5.1 – Stations hydrométriques utilisées

Les données pluviométriques sont calculées pour chaque sous-bassin à partir des pluies horaires relevées aux postes pluviométriques décrits dans le tableau 5.2 et des pondérations issues des polygones de Thiessen (tableau 5.3). Certaines chroniques de pluie présentent des lacunes parfois importantes. Ces lacunes ont été reconstituées à partir des données journalières issues de la base SAFRAN, désagrégées au pas de temps horaire en utilisant la station pluviométrique la plus proche.

Commune	Code	Disponibilité pluie horaire
Pouilly-en-Auxois	21501003	1991-2009
Saint Martin de la Mer	21560001	2004-2009
Semur-en-Auxois	21603001	1991-09/2006 20/11/2008-04/2009
Chablis	89068001	1994-2009
Joigny	89206001	1993-2009
Noyers-sur-Serein	89279001	1993-2009
Saint André en Terre Plaine	89333001	2005-2009
Saint-Georges-sur-Baulche	89346001	1993-2009

TABLEAU 5.2 – Postes pluviométriques utilisées

Commune	Amont Bierre	Bierre - Dissangis	Dissangis - Chablis	Chablis - Beaumont
Pouilly	0.12			
St Martin	0.76	0.10		
Semur	0.12	0.13		
Chablis			0.33	0.79
Joigny				0.06
Noyers		0.12	0.67	
St André		0.65		
St-Georges				0.15
Total	1.00	1.00	1.00	1.00

TABLEAU 5.3 – Coefficients de pondération issus des polygones de Thiessen

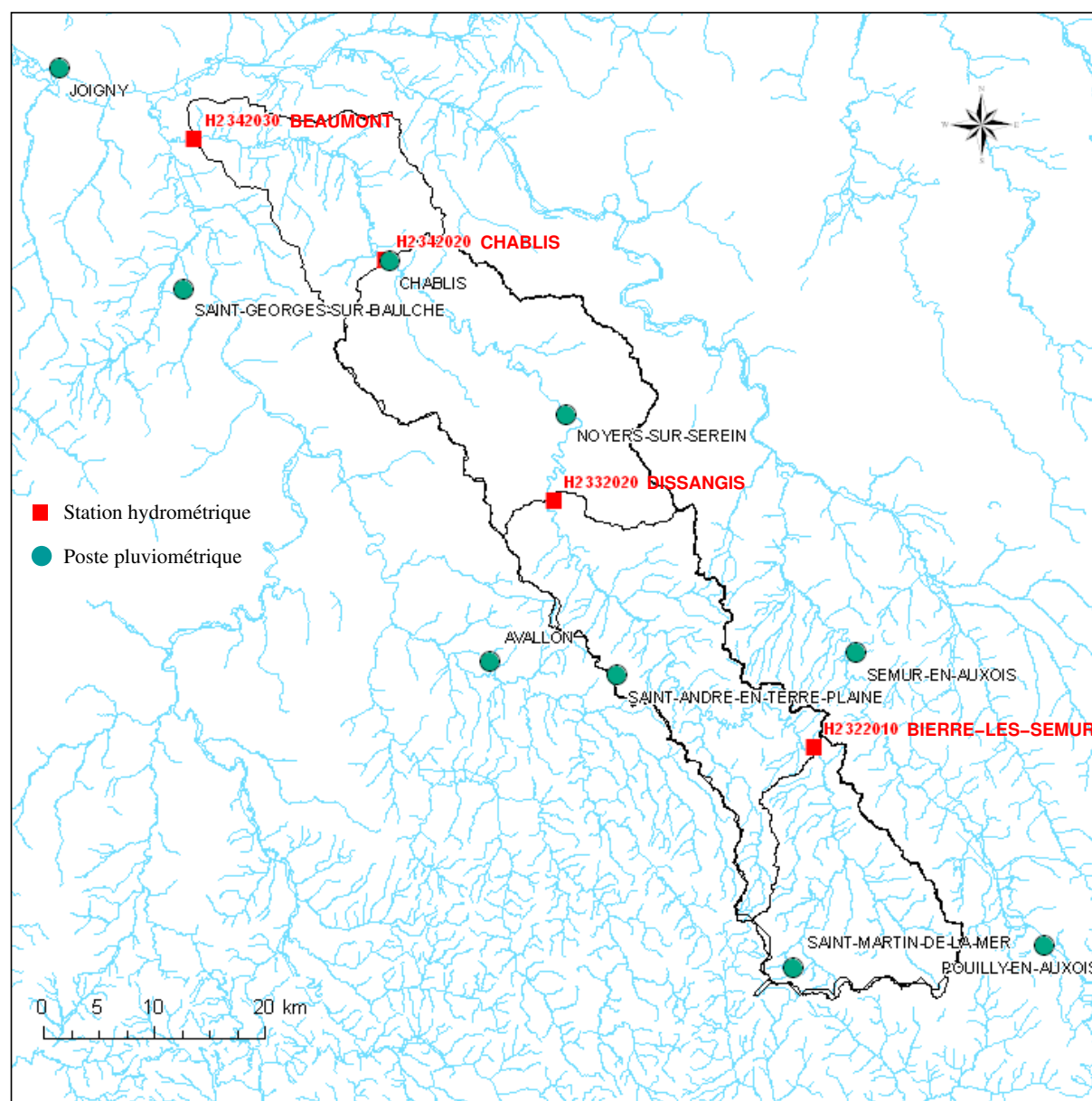


FIGURE 5.6 – Localisation des bassins et stations de mesure

Enfin, des données d'ETP ont été calculées sur la base de données de températures moyennes de bassin, en utilisant la formule de Oudin *et al.* (2005). Les cumuls journaliers calculés ont été répartis sur 24 h par une courbe en cloche sur 12 h de journée, l'ETP étant supposée nulle sur les 12 heures complémentaires. Des courbes d'ETP moyennes interannuelles ont été générées pour chaque sous-bassin.

5.2.4 Structure du modèle intégré

Décomposition spatiale du bassin versant

La différence majeure entre les structures des modèles GR3P (global) et TGR (semi-distribué) vient de l'ajout d'une composante hydraulique dans ce dernier, qui permet de prendre en compte un débit amont. Avec le modèle GR3P, le système considéré comprend la totalité du bassin versant à l'amont de la station où l'on souhaite calculer le débit. Au contraire, le modèle TGR permet de réduire le système au sous-bassin compris entre deux stations hydrométriques, en considérant l'hydrologie sur ce sous-bassin ainsi que l'hydraulique entre les stations amont et aval. Ainsi, pour le bassin versant du Serein, nous considérons quatre sous-bassins délimités par les quatre stations de mesure disponibles (figure 5.7), chacune représentant l'aval d'un sous-bassin :

- BV 1 : à l'amont de Bierre-les-Semur,
- BV 2 : entre Bierre-les-Semur et Dissangis,
- BV 3 : entre Dissangis et Chablis,
- BV 4 : entre Chablis et Beaumont.

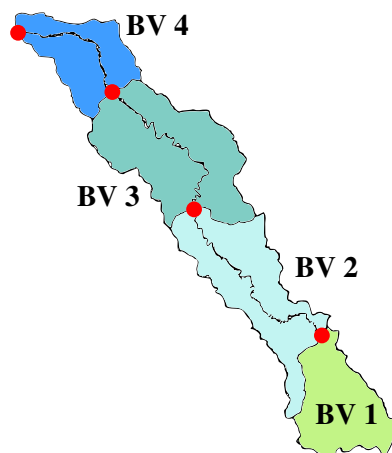


FIGURE 5.7 – Découpage spatial du bassin versant du Serein pour le modèle TGR

Le premier bassin, à l'amont de Bierre, ne possède pas de station de mesure amont. Toutefois, en contexte de prévision des crues, on ne dispose pas des prévisions de débit mais seulement des prévisions de pluies, ce qui nous oblige à considérer également ce sous-bassin. On supposera alors pour ce sous-bassin que le débit amont est nul et que les seuls apports proviennent des pluies. Pour les trois autres bassins, la morphologie allongée suggère que seuls de petits affluents

se déversent dans le Serein. Ceci peut être montré par la courbe des surfaces drainées (figure 5.8) qui ne met en évidence qu'un seul affluent sur le BV 3 représentant plus de 25 % de la surface du sous-bassin. Cet affluent est situé à l'amont immédiat de la station de Chablis et draine 34 % de la surface du BV 3. Sa prise en compte dans le modèle en tant qu'apport latéral ponctuel n'a pas permis d'améliorer la reconstitution du débit à Chablis. Aussi, nous considérerons les apports dus aux pluies comme uniformément répartis le long de chacun des biefs des sous-bassins 2, 3 et 4.

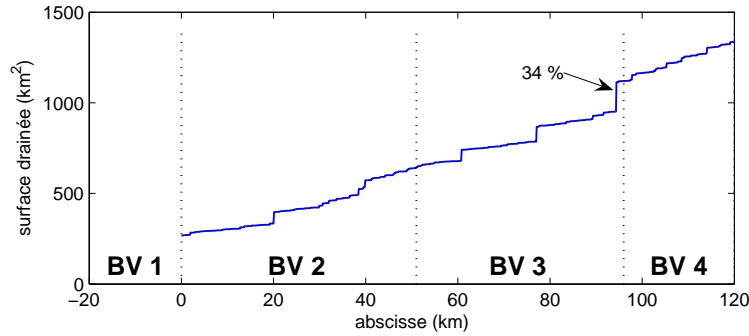


FIGURE 5.8 – Courbe des surfaces drainées entre les stations de Bierre et Beaumont

Entrées, sorties et paramètres du modèle

Les pluies et ETP ont été calculées pour chaque sous-bassin à l'aide des coefficients de pondération de Thiessen (voir tableau 5.3). Ces données constitueront les entrées du modèle TGR. Les sorties seront les débits aux quatre stations hydrométriques. Le modèle sera décomposé en quatre sous-modèles ($TGR^{(i)}$, $i = 1..4$) représentant le transfert hydraulique-hydrologique de chaque sous-bassin selon le schéma de la figure 5.9, où P_i , E_i et Q_i représentent respectivement la pluie, l'ETP et le débit à l'aval du sous-bassin i ($i = 1..4$).

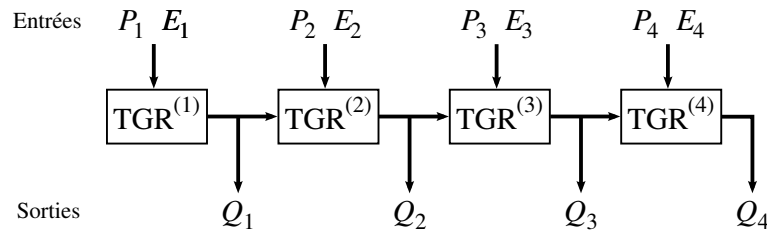


FIGURE 5.9 – Schéma de fonctionnement du modèle TGR sur le bassin du Serein

Le modèle $TGR^{(i)}$ relatif au sous-bassin i est défini par cinq paramètres à identifier : $\tau_0^{(i)}$, $K_0^{(i)}$, $K_R^{(i)}$, $S^{(i)}$ et $IGF^{(i)}$. Pour le BV 1, nous avons déjà précisé que seul le transfert hydrologique est représenté, le débit amont étant supposé nul. Dans ce cas, les paramètres $\tau_0^{(1)}$ et $K_0^{(1)}$ n'ont plus de sens et pourraient être fixés à 0. Toutefois, rappelons que le paramètre K_U , représentant le transfert d'un débit latéral uniformément distribué, est calculé à partir de τ_0 et K_0 . Afin de conserver ce paramètre pour le BV 1, nous choisirons de ne fixer que le paramètre $\tau_0^{(1)}$ à 0, $K_0^{(1)}$ restant un paramètre à caler.

5.2.5 Identification, validation

Le modèle TGR possède 4 paramètres pour le BV 1, et 5 pour les trois autres sous-bassins, soit 19 paramètres au total à caler. Etant donné que nous disposons des données de débits sur chacune des stations, l'identification se fera sur chaque sous-bassin séparément. Nous utiliserons la procédure décrite dans le chapitre 4 de calage-contrôle croisé. La période d'étude est donc décomposée en deux sous-périodes P1 et P2 définies comme suit :

- P1 : du 01/01/1994 au 31/12/2001
- P2 : du 01/01/2002 au 28/02/2009

Une année de mise en route a été ajoutée au début de chaque période utilisée pour l'identification de façon à palier au problème de condition initiale pour le réservoir de production du sous-modèle hydrologique GRK.

Le schéma 5.10 résume la procédure de calage-contrôle croisé.

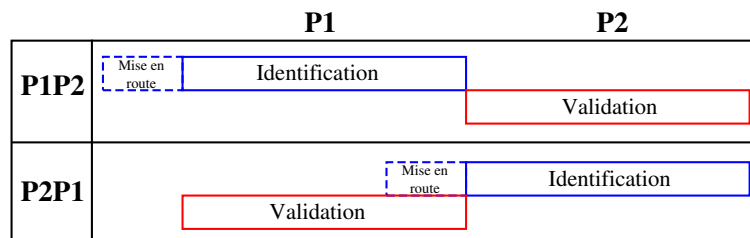


FIGURE 5.10 – Les deux configurations de calage-contrôle croisé

Les jeux de paramètres obtenus à l'issue de l'étape d'identification, ainsi que le critère de Nash sur les périodes d'identification et de validation sont présentés dans le tableau 5.4. La figure 5.11 présente des extraits des résultats de validation sur les crues de décembre 1999 et mars 2006, obtenus avec les résultats d'identification sur P2 et P1 respectivement. Notons que ces résultats ne peuvent être comparés à ceux du modèle GR3P car ce dernier possède une procédure d'assimilation intégrée qui lui permet d'être calé directement pour un horizon de prévision donné. Ainsi, les paramètres du modèle GR3P sont optimisés afin de produire les meilleurs résultats à cet horizon de prévision.

Bassin	Calage sur	τ_0	K_0	K_R	S	IGF	Nash Id (%)	Nash Va (%)
1	P1	0.0	13.1	48.6	186.9	0.745	79.3	57.7
	P2	0.0	8.5	54.2	243.6	0.747	59.2	74.3
2	P1	13.0	4.8	44.3	219.2	0.753	83.8	87.3
	P2	8.0	6.8	65.1	185.2	0.737	88.6	83.2
3	P1	15.0	13.8	192.2	150.4	0.889	87.5	96.0
	P2	15.0	7.5	206.7	132.2	0.838	96.6	84.7
4	P1	8.0	9.9	101.7	404.0	1.486	97.0	97.5
	P2	0.0	15.3	509.9	214.4	1.208	98.2	96.5

TABLEAU 5.4 – Résultats d'identification pour chaque sous-bassin avec les deux configurations de calage-contrôle (P1P2 et P2P1)

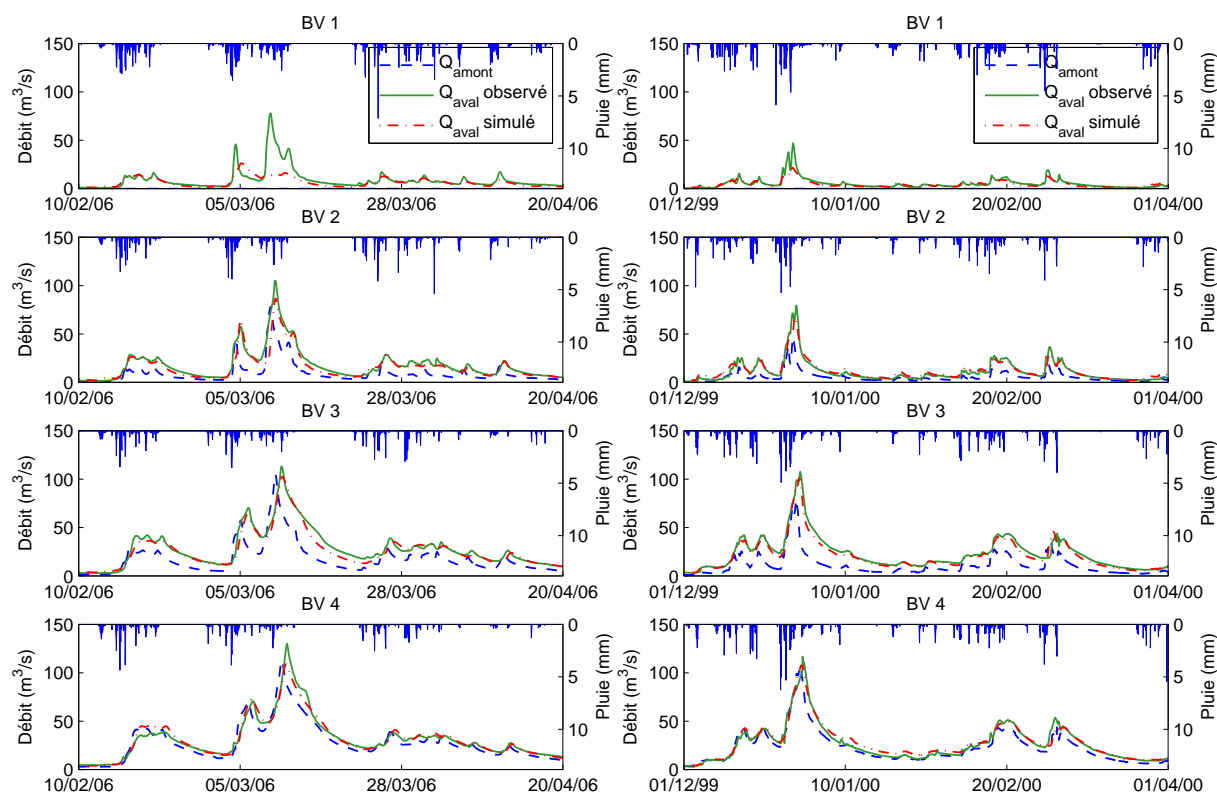


FIGURE 5.11 – Résultat de validation pour la crue de mars 2006 (calage sur P1) et pour la crue de décembre 1999 (calage sur P2)

Ces résultats amènent plusieurs remarques.

- Sur le BV 1, le modèle TGR présente un critère de Nash entre 55 % et 75 %, ce qui correspond à des performances moyennes. Ce résultat est visible sur les graphes par une difficulté de représenter les pics de crue. Rappelons que pour ce sous-bassin, seule l'hydrologie est modélisée puisqu'aucun débit amont n'est disponible. Or le modèle TGR est obtenu par l'intégration dans un modèle hydrologique simple d'une composante hydraulique, cette intégration se faisant au détriment de la composante hydrologique, notamment par la linéarisation du réservoir de routage. Un modèle non linéaire de l'hydrologie de ce sous-bassin aurait pu permettre d'améliorer ces performances. Malgré tout, l'assimilation de données pratiquée par la suite permettra de corriger les erreurs sur le BV 1, et les performances mitigées du modèle sur ce sous-bassin n'auront une influence sur les autres sous-bassins qu'au-delà du temps de propagation dans le cours d'eau.
- Sur les BV 2, 3 et 4, les performances du modèle sont bonnes, voire très bonnes, avec un critère de Nash compris entre 80 % et 97 %. Ces résultats permettent d'assurer la pertinence du modèle sur ces bassins. Ils indiquent également que plus on va vers l'aval, plus le poids du transfert de débit amont augmente par rapport aux apports hydrologiques du bassin intermédiaire.
- On peut vérifier la consistance des paramètres en observant les valeurs obtenues avec un calage sur P1 et P2 respectivement. Sur les BV 1 à 3, le choix de la période d'identification n'a que peu d'influence sur les valeurs des paramètres. Pour les BV 1 et 3, les performances en terme

de Nash diffèrent d'une période à l'autre. Compte tenu de la consistance des paramètres sur ces bassins, on peut supposer que cette différence provient des particularités des événements présents dans l'une ou l'autre des deux périodes.

- Le BV 4 présente une variabilité assez importante des paramètres entre les deux périodes. Toutefois, on note de très bons résultats en validation, quelle que soit la période d'identification. Ceci peut s'expliquer à travers l'observation suivante. Les pics de crue dépendent à la fois de la propagation du débit amont et des pluies sur le sous-bassin. Le paramètre K_R est multiplié par 5 entre les périodes P1 et P2. Cette augmentation a pour effet d'amortir et de retarder le pic de crue dû aux pluies sur le sous-bassin. L'amortissement est alors compensé par une diminution du paramètre S (qui est divisé par 2), traduisant un lissage moins important opéré sur les pluies. Le retard est, quant à lui, compensé par une diminution du paramètre τ_0 (qui atteint ici la valeur nulle), permettant un transfert plus rapide du débit amont. Ainsi, pour le BV 4, il semblerait que les crues soient autant influencées par les pluies sur le sous-bassin que par le débit amont, ce qui rend difficile pour le modèle de distinguer la part du débit aval due aux apports hydrologiques de la part due à la propagation du débit amont. Ceci traduit les problèmes d'identifiabilité évoqués au chapitre 4.
- On pourrait penser que la valeur du paramètre τ_0 représente le retard entre les pics de crue à l'amont et à l'aval dû à la propagation hydraulique dans un bief. Toutefois, la notion de retard prête à confusion, car le paramètre K_0 traduit un amortissement qui introduit également un certain retard. La notion de temps de réponse hydraulique a été explorée par Munier *et al.* (2009). En première approximation, il est plus juste de considérer la somme $\tau_0 + K_0$ que le paramètre τ_0 seul pour représenter le temps de retard dû à la propagation entre l'amont et l'aval. On peut alors estimer à environ 16 h le retard sur le BV 2, 26 h sur le BV 3 et 17 h sur le BV 4. Ces valeurs correspondent à l'intervalle de temps entre les pics de crue amont et aval que l'on peut mesurer sur les hydrogrammes. Nous reviendrons sur ces valeurs lors de la comparaison des résultats de prévision avec les scénarios PP et P0.
- Le tableau 5.4 présente pour chaque sous-bassin des valeurs très différentes pour les paramètres K_0 et K_R . Le routage rivière et le routage bassin traduisent donc des processus très différents. Il s'agit dans les deux cas de représenter l'écoulement dans les cours d'eau, mais pour le routage bassin (K_R), les cours d'eau considérés vont du plus petit ruisseau au plus grand affluent, ce qui représente un linéaire moyen bien plus long que le cours d'eau principal représenté par le routage rivière (K_0).
- Enfin, on peut noter que le paramètre IGF prend des valeurs inférieures à 1 pour les BV 1, 2 et 3, ce qui représente des pertes dans la nappe, alors que la valeur supérieure à 1 pour le BV 4 représente un gain sur ce sous-bassin. Ceci correspond aux observations faites par le gestionnaire quant à des infiltrations potentielles dans le karst des bassins amont et une résurgence à l'aval.

On voit donc qu'il est possible, à travers l'analyse des résultats d'identification, d'appréhender les comportements hydrologique et hydraulique différents des quatre sous-bassins. Cette analyse est rendue possible d'une part parce que les paramètres conservent une signification physique malgré

l'aspect global et conceptuel du modèle, d'autre part parce que le système a pu être décomposé en sous-systèmes grâce aux données de débit intermédiaires. Rappelons que le modèle GR3P actuellement utilisé par la DIREN ne permet pas de prendre en compte les débits intermédiaires, chaque bassin étudié incluant alors tous les sous-bassins amont. Il est dans ce cas plus délicat d'analyser les comportements hydrologiques des différents sous-bassins.

5.2.6 Assimilation de données

Nous avons vu à travers l'étape précédente que le modèle TGR permet de bien (voire très bien) représenter les comportements hydrologique et hydraulique des différents sous-bassins, malgré les résultats mitigés pour le BV 1. Seulement, en contexte opérationnel, nous ne disposons que de prévisions de pluies. Le débit amont utilisé dans les modèles des sous-bassins 2, 3 et 4 est donc celui calculé par les modèles des sous-bassins 1, 2 et 3 respectivement. Ainsi, l'erreur de modélisation se propage entre les sous-bassins, et les performances à l'aval risquent d'être très mauvaises.

L'assimilation de données paraît dans ce cas indispensable afin de corriger ces erreurs à partir des mesures de débits en temps réel. Par contre, dès lors que l'on cherche à prévoir les débits futurs, on ne peut éviter les erreurs de modélisation et leur propagation, ce qui aura un impact sur les performances de prévision.

Nous développons ici quelques résultats de l'application du filtre de Kalman présentée en début de chapitre.

Corriger l'hydrologie ou l'hydraulique ?

L'un des intérêts fondamentaux de la théorie du filtre de Kalman est que l'on peut choisir à travers les coefficients de la matrice de covariance (que nous appellerons coefficients de pondération) quel poids attribuer à l'erreur sur le débit aval par rapport à chacun des états internes du système (voir partie 5.1.1). En d'autres termes, si l'on porte une grande confiance sur la partie hydraulique du modèle, il est possible d'attribuer aux états correspondant un coefficient de pondération très faible dans la matrice de covariance. Dans ce cas, les corrections apportées aux états relatifs à l'hydrologie seront plus importantes que celles apportées aux états hydrauliques. Chaque état se voit ainsi attribuer un coefficient de pondération qui traduit la confiance que l'on peut lui porter. Nous définissons les états hydrauliques comme étant ceux relatifs aux paramètres τ_0 et K_0 . Il s'agit des états x_{p_i} à $x_{p_i+n_i}$ sur la figure 5.2. Les autres états, $x_{p_i+n_i+1}$ à $x_{p_i+n_i+m_i+3}$, seront appelés états hydrologiques.

Ceci permet de tester différentes configurations afin d'évaluer la confiance que l'on peut avoir dans la partie hydraulique et dans la partie hydrologique respectivement. Trois configurations sont testées :

- C_1 : Seuls les états hydrauliques sont corrigés avec un poids égal. Les coefficients de pondération sont égaux à 1 pour les états hydrauliques et 0 pour les états hydrologiques. Cette configuration traduit une confiance totale dans la partie hydrologique du modèle.

- C_2 : Seuls les états hydrologiques sont corrigés avec un poids égal. Les coefficients de pondération sont égaux à 1 pour les états hydrologiques et 0 pour les états hydrauliques. Cette configuration traduit une confiance totale dans la partie hydraulique du modèle.
- C_3 : Tous les états sont corrigés avec un poids égal. Les coefficients de pondération sont tous égaux à 1. Cette configuration traduit une confiance égale dans les parties hydraulique et hydrologique du modèle.

Pour comparer ces trois configurations, nous utiliserons un critère nommé NME calculant la norme moyenne de l'erreur. Ce critère est défini par :

$$\text{NME} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \|y(k) - C\hat{x}(k|k-1)\|_1 \quad (5.22)$$

où N est le nombre de pas de temps, $y(k)$ la mesure au pas de temps k et $\hat{x}(k|k-1)$ l'état estimé au pas de temps k à partir des mesures au pas de temps $k-1$. Rappelons que $\|y(k)\|_1 = \sum_i |y_i(k)|$. Le critère NME représente donc l'erreur moyenne entre les débits mesurés aux quatre stations et les débits estimés après correction des états antérieurs. La valeur du critère NME traduit l'importance des corrections effectuées à chaque pas de temps. Ainsi, une valeur faible (en comparaison à une valeur forte) signifie que le modèle représente assez bien la dynamique du système, et que de faibles corrections ont suffi à corriger les erreurs de modélisation.

Résultats

Chaque configuration a été testée sur la période de validation. Les valeurs des critères NME sont rassemblées dans le tableau 5.5. Nous n'avons pas précisé le critère de Nash obtenu après correction car il atteint systématiquement des valeurs supérieures à 99.9 %. Notons que de telles valeurs du critère de Nash indiquent que les corrections appliquées sur les états internes par l'algorithme de Kalman ont permis de reconstituer le débit aval presque parfaitement. Toutefois, rien n'indique que les états corrigés sont les mêmes pour les différentes configurations, ce qui peut avoir une influence non négligeable sur la prévision des débits futurs.

Calage sur	C_1	C_2	C_3
P1	2.65	0.42	0.88
P2	2.92	0.53	0.90

TABLEAU 5.5 – Critère NME pour les trois configurations testées

Ces résultats montrent clairement que la configuration ayant nécessité les plus faibles corrections est la configuration C_2 pour laquelle seuls les états hydrologiques ont été corrigés. On pourrait noter que cette configuration ne présente que deux états à corriger par sous-bassin (puisque l'on ne considère ici que des apports latéraux uniformément distribués), alors que les deux autres en présentent un nombre bien plus important (du fait de la discrétisation du retard τ_0 qui introduit $E(\tau_0/\Delta t)$ états), ce qui pourrait augmenter le critère NME. Mais la correction de l'erreur étant répartie entre les différents états, un nombre important d'états à corriger implique des corrections

plus faibles sur chaque état.

En conclusion, ces résultats montrent que recalculer les états hydrauliques en conservant les états hydrologiques (configuration C_1) requiert un « effort » plus important que l'inverse. Ceci laisse supposer que l'on peut avoir une plus grande confiance dans la partie hydraulique du modèle. Dans la suite, lors de l'application du modèle pour la prévision, ces trois configurations ont également été testées. Il en ressort que la configuration C_1 produit les plus faibles performances. Quant aux configurations C_2 et C_3 , leurs performances sont très proches, avec toutefois un très léger avantage à la configuration C_3 , c'est à dire lorsque tous les états sont recalés. Les résultats présentés dans la partie suivante ont été obtenus avec la configuration C_3 .

5.2.7 Prévision

Implémentation

La prévision des débits aux quatre stations de mesure est effectuée dans un contexte aussi proche que possible du contexte opérationnel. A chaque pas de temps, les états internes du système sont mis à jour à partir des nouvelles mesures disponibles par l'algorithme de Kalman. Une simulation est alors lancée avec les deux scénarios de pluie considérés, à savoir pluies parfaites (PP) ou pluies nulles (P0). L'état initial pris pour la simulation est l'état recalé avec les dernières mesures. La simulation court sur une période de 72 h, qui représente le plus grand horizon de prévision considéré. Les résultats sont ensuite stockés pour être analysés par comparaison avec les mesures relevées aux pas de temps suivants. La figure 5.12 schématise la prévision avec le modèle TGR.

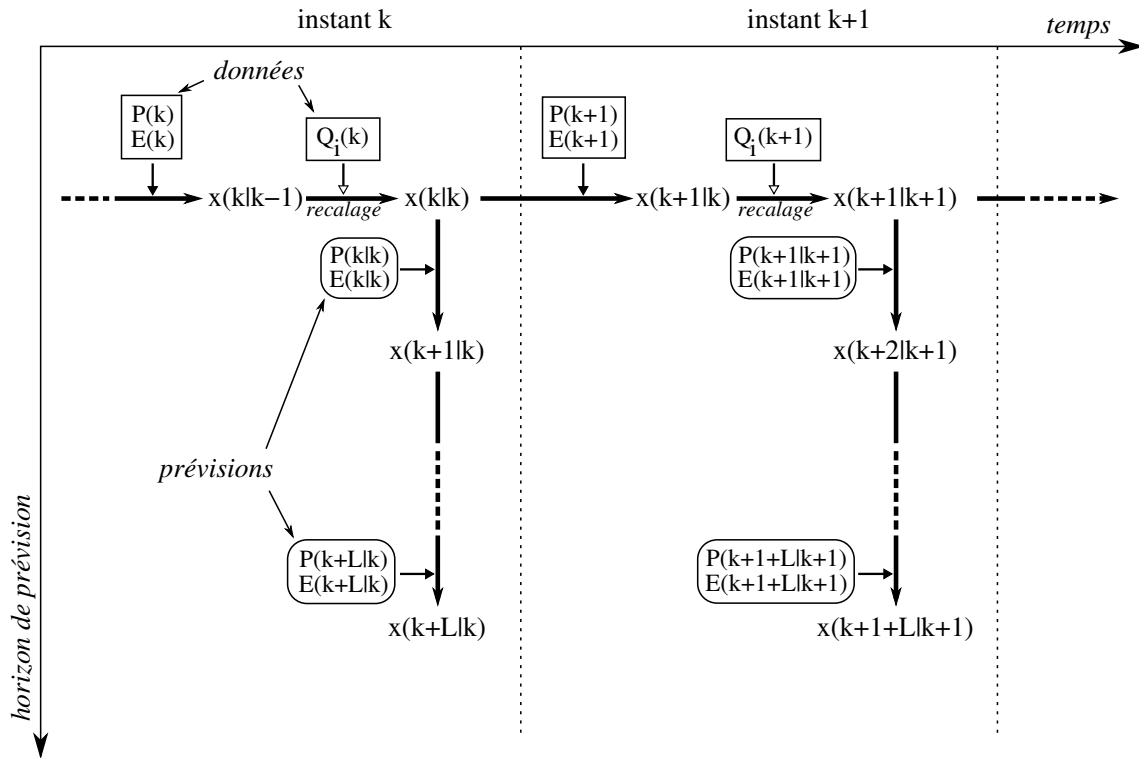


FIGURE 5.12 – Schéma de la prévision avec le modèle TGR (L : horizon de prévision maximum)

L'analyse des résultats est effectuée par le calcul du critère RMSE, en ne retenant que les débits supérieurs à Q_{95} . La figure 5.13 présente les courbes des débits classés pour les quatre stations considérées. Le calcul de Q_{95} conduit aux valeurs indiquées sur la figure.

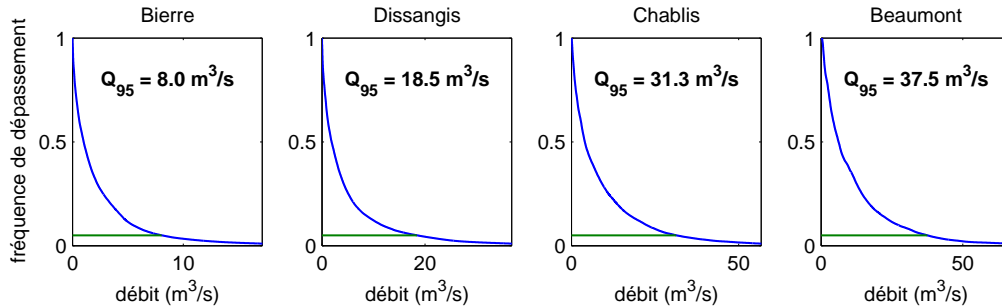


FIGURE 5.13 – Courbes des débits classés pour les quatre sous-bassins

Analyse des résultats et comparaison avec GR3P

Les figures 5.14 et 5.15 présentent les résultats de prévision sur les crues de mars 2006 et décembre 1999, obtenus avec les modèles TGR et GR3P pour les quatre stations et à différents horizons (6 h, 24 h et 48 h). Pour le modèle TGR, les scénarios PP et P0 sont représentés par les limites supérieures et inférieures de la zone grisée, respectivement. Pour le modèle GR3P, la courbe supérieure représente le scénario PP tandis que la courbe inférieure représente le scénario P0. On peut voir d'emblée que les résultats sont bons pour les deux modèles à l'horizon de 6 h puis qu'ils se dégradent lorsque l'horizon augmente. On remarque également que le faisceau a tendance à s'élargir sur les périodes de crue, et à se retrécir sur les périodes de décrue, ce qui s'explique par le fait qu'en période de décrue, les pluies sont généralement nulles (ou quasi-nulles) et les scénarios PP et P0 sont alors semblables.

Globalement, lorsque l'horizon de prévision augmente, les résultats sont meilleurs avec le modèle TGR, notamment sur la station aval qui semble poser problème au modèle GR3P. En outre, la prévision avec le modèle TGR s'améliore de la station amont à la station aval. Pour la crue de 1999, les résultats du modèle GR3P sont bien meilleurs sur les stations amont.

La figure 5.16 donne le critère RMSE en fonction de l'horizon de prévision, pour les deux modèles et pour les deux scénarios.

Pour le BV 1, les résultats du modèle GR3P sont légèrement meilleurs que ceux du modèle TGR, ce qui pouvait être attendu. En effet le modèle TGR n'utilise pas sa partie hydraulique pour ce sous-bassin puisqu'aucun débit amont n'est disponible. Les deux modèles utilisent donc les mêmes données en entrée et ont une structure du même type. La différence réside dans la méthode d'assimilation et la linéarisation du réservoir de routage pour le modèle TGR.

Pour le BV 2, le temps de transfert entre l'amont et l'aval est de l'ordre de 16 h ($\tau_0 + K_0$). On peut voir que jusqu'à l'horizon de 16 h, les performances du modèle TGR sont équivalentes à celles du modèle GR3P. Au-delà, le modèle GR3P conserve des performances légèrement meilleures. De même, le temps de transfert du BV 3 est de 26 h et les performances de TGR sont meilleures

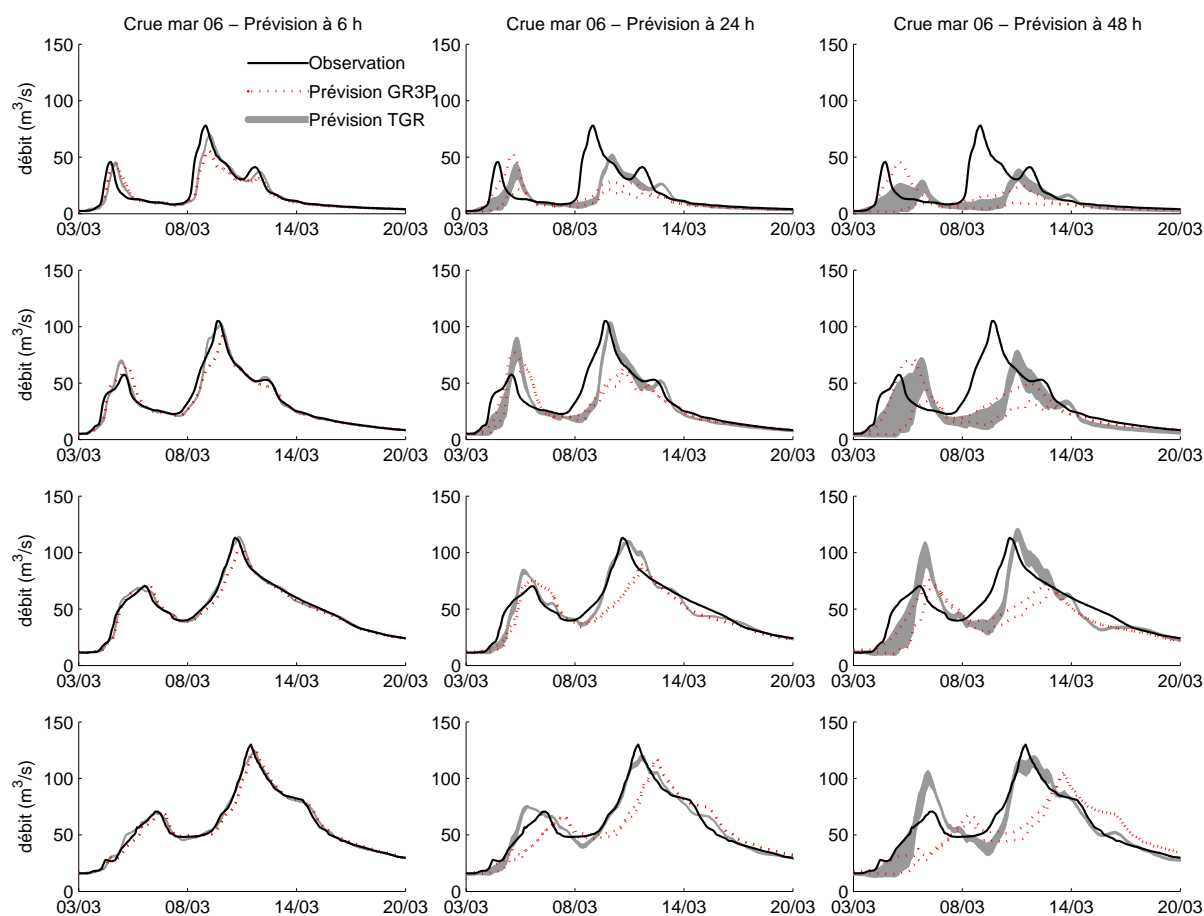


FIGURE 5.14 – Résultat de prévision pour la crue de mars 2006 (calage sur P1) avec les deux scénarios de pluies (PP et P0). Du haut vers le bas : BV 1 à 4.

jusqu'à un horizon d'environ 50 h, ce qui correspond à peu près à la somme des temps de transfert des BV 2 et 3. Enfin, le temps de transfert du BV 4 est de 17 h, et l'on peut voir que les performances du modèle TGR se dégradent fortement à partir de 60 h environ, soit la somme des temps de transfert des BV 2 à 4. Ceci montre clairement que la prise en compte dans le modèle TGR des débits intermédiaires en tant que données supplémentaires a permis d'améliorer la prévision jusqu'à un horizon correspondant au temps à partir duquel ces données n'ont quasiment plus d'influence. Au-delà de ce temps, seules les pluies influent sur le débit à l'exutoire des sous-bassins.

Par ailleurs, on peut noter que les temps de transfert mis en évidence correspondent plus ou moins aux temps de réponse des différents sous-bassins. En effet, pour un horizon de prévision inférieur au temps de transfert, les scénarios PP et P0 conduisent à des performances égales, aussi bien pour le modèle GR3P que pour le modèle TGR. Au-delà de ce temps de transfert, les performances du scénario P0 se dégradent bien plus vite.

Enfin, on remarque que les performances du modèle GR3P sont moins bonnes sur le BV 4 que sur les trois autres, notamment pour le scénario PP. Le modèle GR3P est un modèle global qui considère le bassin versant dans sa totalité (contrairement au modèle TGR qui considère des

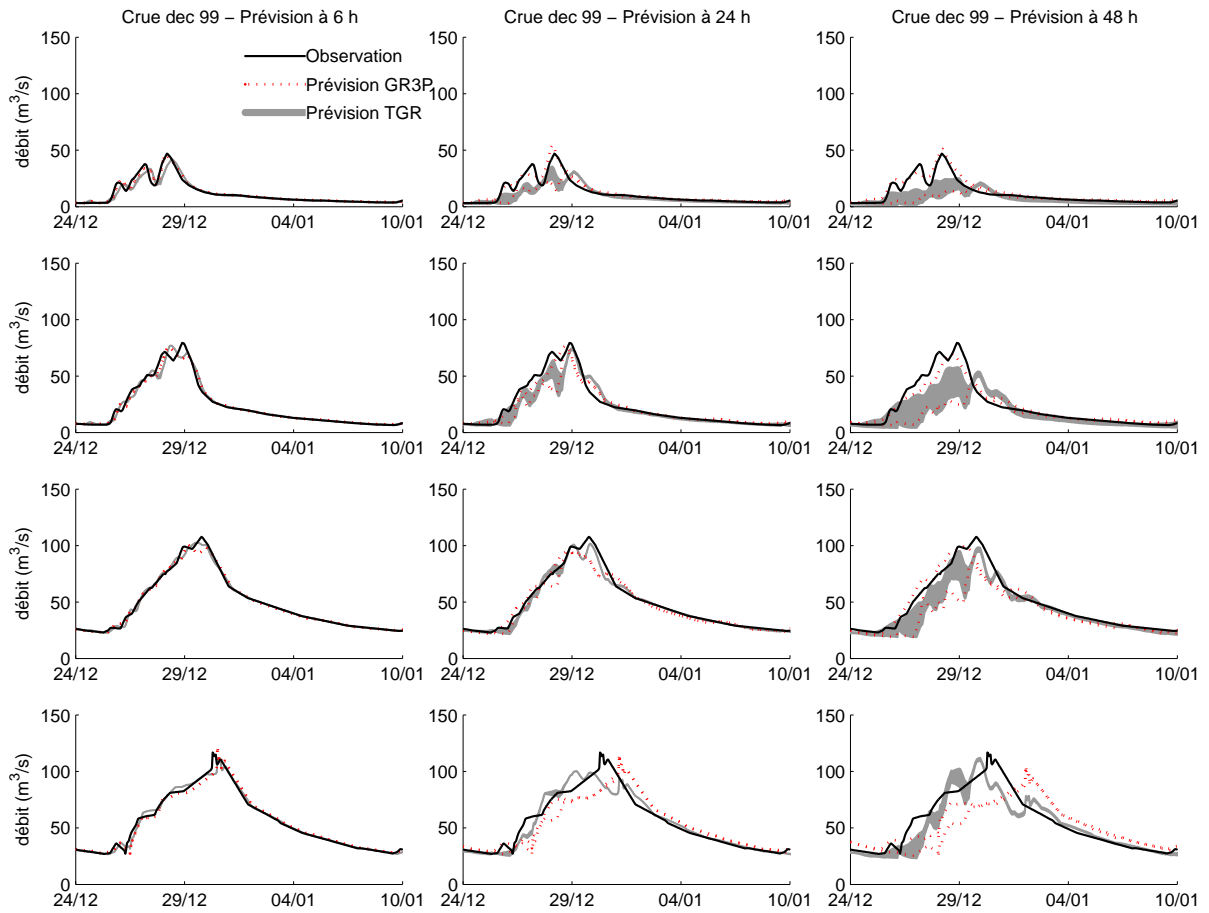


FIGURE 5.15 – Résultat de prévision pour la crue de décembre 1999 (calage sur P2) avec les deux scénarios de pluies (PP et P0). Du haut vers le bas : BV 1 à 4.

sous-bassins délimités par une station amont et une station aval). Ce modèle fait implicitement l'hypothèse que le comportement hydrologique est uniforme sur tout le bassin. Or nous avons vu lors de l'analyse des paramètres du modèle TGR obtenus par identification que le BV 4 avait un comportement hydrologique particulier par rapport aux trois autres. Cette analyse met en évidence une variabilité spatiale du comportement hydrologique entre les BV 1 à 3 et le BV 4, variabilité que le modèle GR3P ne peut pas prendre en compte. Ceci permet de comprendre pourquoi ce modèle est mis en échec sur le BV 4 et pas sur les autres.

5.2.8 Conclusion

Dans cette application, le filtre de Kalman a été mis en œuvre sur le modèle TGR pour la prévision des crues sur le bassin versant du Serein. À l'issue de l'étape préliminaire d'identification des paramètres, l'analyse des valeurs obtenues a permis d'appréhender le fonctionnement hydrologique et hydraulique du bassin versant. Trois configurations ont ensuite été testées lors de l'implémentation du filtre de Kalman. Ces tests ont montré que corriger seulement les états hydrologiques nécessitait des corrections plus faibles que lorsque les corrections portaient seulement

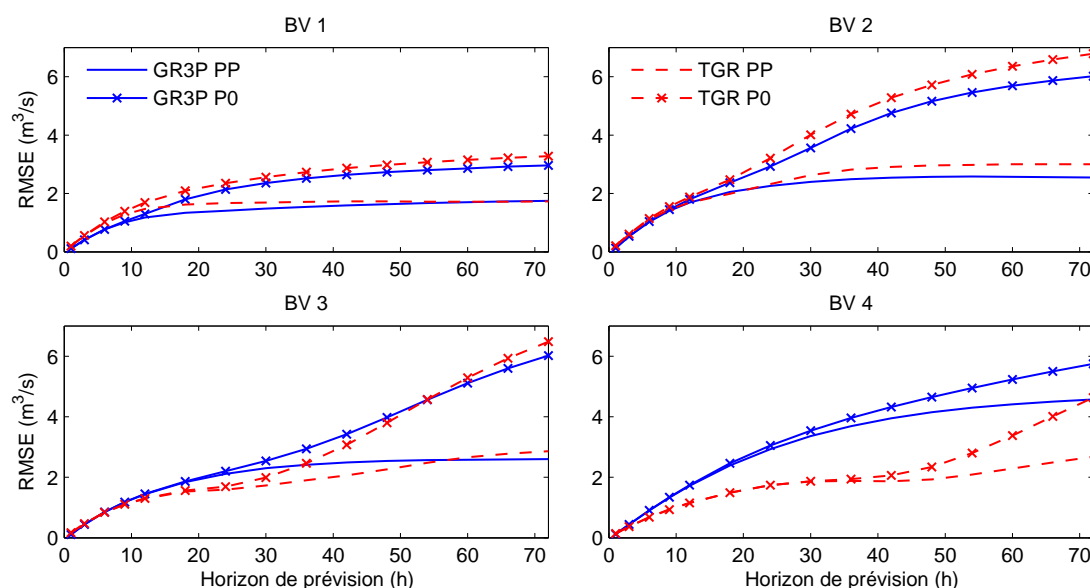


FIGURE 5.16 – Critère RMSE pour les deux scénarios de pluie (P0 et PP) avec les modèles GR3P et TGR

sur les états hydrauliques, ce qui traduit une plus grande confiance dans la partie hydraulique du modèle que dans la partie hydrologique.

Enfin, les résultats de prévision ont permis de mettre en relation le temps de transfert dans le cours d'eau au temps de réaction du bassin. En outre, la prise en compte dans le modèle TGR des débits intermédiaires pour le recalage en temps réel des états internes du système a permis d'améliorer les résultats de prévision pour des horizons inférieurs au temps de transfert amont-aval.

La méthode pourrait être étendue à un modèle non linéaire par l'utilisation du filtre de Kalman étendu ou d'ensemble. Il serait alors envisageable d'utiliser un modèle hydraulique non linéaire permettant d'améliorer la simulation de la propagation des crues, ainsi qu'un réservoir de routage également non linéaire. Un algorithme de Kalman étendu ou d'ensemble permettrait en outre un recalage du réservoir de production, qui est resté non linéaire dans la méthode présentée ici.

5.3 Observateurs d'états - reconstitution de prélèvements

5.3.1 Contexte, objectif

Pour cette application, nous nous plaçons dans le contexte de gestion d'un système barrage-rivière en période d'été. La gestion opérationnelle se décline alors en trois missions :

- la prévision des débits aux points nodaux à un horizon de l'ordre de la semaine,
- la commande en temps réel des vannes des barrages,
- la simulation de scénarios de gestion (en termes de manœuvres de vannes) afin d'anticiper les situations de crise.

Ces trois missions nécessitent l'utilisation d'un modèle hydraulique représentant le transfert de débit entre la vanne et les points nodaux, notamment pour tenir compte du temps de transfert entre l'amont et l'aval (qui peut aller jusqu'à plusieurs jours) afin d'anticiper correctement les lâchers. De plus, la prise en compte des apports hydrologiques permet d'affiner la prévision et d'établir des scénarios de gestion réalistes. Enfin, la satisfaction des DOE implique la nécessité de satisfaire la demande en eau sur le bassin, notamment en termes de prélèvements pour l'irrigation, qui concernent souvent les volumes les plus importants des différents usages (voir chapitre 1) et qui sont les plus difficiles à anticiper.

Ces considérations montrent l'utilité dans ce contexte d'un modèle adapté à la prévision en temps réel ainsi qu'à la commande automatique pour la gestion des manœuvres de vanne, modèle intégrant l'hydraulique dans le cours d'eau principal, l'hydrologie du bassin versant et les prélèvements pour l'irrigation.

Si l'utilisation de modèles de transfert de débit est courante pour anticiper le retard dû à la propagation dans les cours d'eau (par exemple le modèle d'Hayami largement utilisé dans ce contexte), en revanche, l'anticipation de la demande se fait généralement grâce à l'expérience des gestionnaires. Cette difficulté peut conduire parfois à des franchissements des DOE, voire des DCR. Par exemple, sur le bassin versant de l'Adour, les DOE ne sont respectés qu'une année sur deux et les DCR que deux années sur cinq (Nau *et al.*, 2005). En outre les apports pluviométriques sont souvent négligés pour la gestion opérationnelle, ce qui conduit à des gaspillages potentiellement importants de la ressource.

Dans le bilan du PGE (Plan de Gestion des Etiages) de l'Adour (Nau *et al.*, 2005), une utilisation optimale des ouvrages et une connaissance approfondie des usages sont présentées comme des mesures à développer pour aller vers le respect des DOE et DCR.

La localisation des prélèvements est connue car les irrigants sont recensés auprès du gestionnaire. Toutefois, les seules données quantitatives à disposition du gestionnaire sont les volumes prélevés sur la saison complète fournis par des relevés de compteurs volumétriques en fin de saison. Il existe des modèles de demande plus ou moins complexes, basés par exemple sur des bilans hydriques, qui permettent de quantifier les besoins en eau des cultures en fonction de divers paramètres tels que l'avancement dans la saison d'irrigation ou le cumul des températures. On peut citer par exemple les modèles CROPWAT (Smith, 1992) ou ADEAUMIS (Leenhardt *et al.*, 2004a,b). Ces modèles fonctionnent au mieux au pas de temps journalier, ce qui pose problème pour la gestion opérationnelle compte tenu des temps de transfert considérés. Ces modèles sont intéressants plutôt pour la gestion à l'échelle de la saison. D'autres modèles basés sur le comportement des irrigants permettent de représenter l'évolution des prélèvements au cours de la journée, soit en prenant en compte des règles d'action (Lamacq, 1997), ce qui nécessite des enquêtes sur les pratiques et les contraintes d'organisation au sein des exploitations, soit à partir de distributions statistiques. Mais le calage des distributions temporelles des prélèvements nécessite des données à des pas de temps fins, données généralement peu accessible pour le gestionnaire.

Les prélèvements peuvent être considérés comme des débits latéraux sortant du point de vue du cours d'eau principal. A condition de disposer d'un modèle de la demande, ces débits latéraux peuvent être pris en compte dans le modèle TGR, de la même manière que les apports hydrologiques. Lorsque l'on ne dispose pas d'un modèle de demande, mais que l'on peut modéliser les autres phénomènes prédominants (propagation dans le cours d'eau, apports hydrologiques), on peut envisager de reconstituer des chroniques de prélèvements permettant d'une part une compréhension approfondie du système par le gestionnaire, d'autre le calage de modèles de demande.

Nous proposons dans cette application une approche permettant d'appréhender ces prélèvements à travers l'utilisation d'observateurs d'état dans le modèle TGR. La méthode ne permet pas encore de reconstituer les prélèvements de manière quantitative, mais pourrait conduire à l'introduction d'un sous-modèle de demande. Cette approche sera mise en pratique sur le bassin versant amont de l'Adour.

5.3.2 Le système

Le bassin versant Adour amont et la gestion actuelle

L'Adour est un fleuve du bassin aquitain dans le Sud-Ouest de la France, de longueur 335 km et de module à l'aval de $360 \text{ m}^3/\text{s}$. Le système considéré est constitué du bassin versant amont de l'Adour, dont l'exutoire se situe à Aire-sur-Adour (figure 5.17). Ce bassin a une superficie de 2930 km^2 et un débit moyen annuel à l'exutoire de l'ordre de $40 \text{ m}^3/\text{s}$ pour un débit objectif d'étiage (DOE) de $5,8 \text{ m}^3/\text{s}$; il présente :

- 1 axe principal : l'Adour, non réalimenté,
- 2 axes secondaires : l'Arros et le Louet, réalimentés par les barrages Arrêt-Darré ($10,8 \text{ Mm}^3$) et Louet ($5,2 \text{ Mm}^3$) respectivement.

La quasi-totalité des trois axes est utilisée pour l'irrigation de près de 30000 ha de culture, dont majoritairement du maïs. La plupart des prélèvements sont effectués en rivière ou dans la nappe d'accompagnement.

La gestion de ce système consiste, entre autres, en la prévision du débit à Aire-sur-Adour à partir des débits mesurés à l'amont sur l'Adour et les affluents. La gestion des barrages de l'Arros et du Louet a pour but de soutenir le débit à Aire. L'Adour n'étant pas réalimenté, aucune action n'est possible à l'amont de sa confluence avec l'Arros et le Louet. La gestion du système par la CACG repose donc sur la gestion des bassins latéraux (Arros et Louet) par la commande des barrages Arrêt-Darré et Louet, en vue de satisfaire le point de consigne à Aire-sur-Adour.

Actuellement, le modèle d'Hayami est utilisé pour représenter le transfert de débit sur l'Arros et le Louet. Les pluies ne sont prises en compte que sur un seul sous-bassin de l'Arros avec un modèle pluie-débit du type GR au pas de temps journalier ; le débit résultant est injecté entre deux sous-biefs de l'Arros.

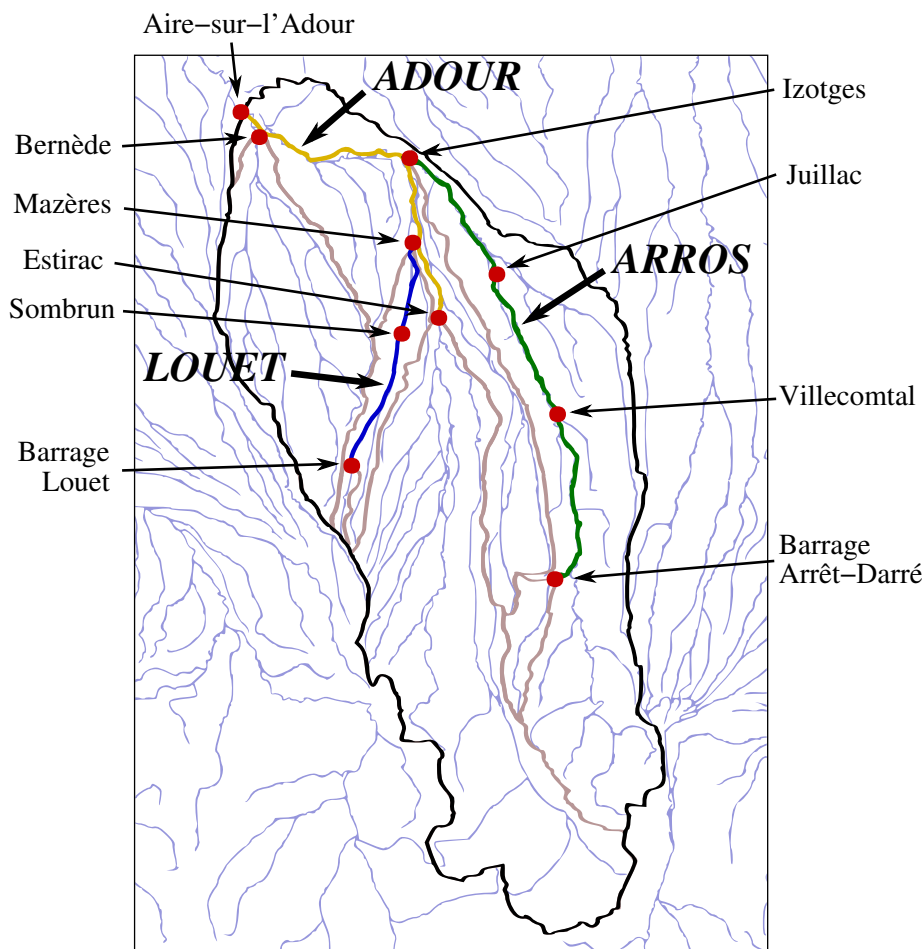


FIGURE 5.17 – Le système Arros-Louet-Adour : stations de mesure

Stations de mesures et données disponibles

Dix stations hydrométriques réparties sur le système considéré fournissent les données horaires en débit sur les trois axes du système, ainsi qu'à l'aval du bassin latéral des Lées (station de Bernède). Ces stations sont indiquées sur la carte de la figure 5.17 et dans le tableau 5.6. Nous disposons pour ces stations des données sur la période de 1997 à 2007.

De même que pour les bassins du Tarn, de l'Aveyron et de la Loue présentés en fin de chapitre 4, ainsi que pour le bassin du Serein présenté dans ce chapitre, les données pluviométriques sont calculées pour chaque sous-bassin considéré (que nous présenterons par la suite) à partir de données horaires relevées sur trois postes pluviométriques et de données journalières issues de la base SAFRAN. Les postes pluviométriques considérés sont les stations de Vic-en-Bigorre, Tarbes-Ossun et Mont-de-Marsan. Les données hydrologiques recouvrent la période de août 1995 à juillet 2005.

Découpage spatial du bassin

Comme pour le cas du Serein, le bassin versant Adour amont sera décomposé en plusieurs sous-bassins délimités par les stations hydrométriques disponibles. Ainsi, un sous-modèle hydrologique

Station	Cours d'eau	Superficie du bassin (km ²)
Barrage Arrêt-Darré	Arrêt-Darré	57
Villecomtal	Arros	479
Juillac	Arros	593
Izotges	Arros	921
Barrage Louet	Louet	14
Sombrun	Louet	86
Mazères	Louet	128
Bernède	Lées	430
Estirac	Adour	906
Aire-sur-l'Adour	Adour	2931

TABLEAU 5.6 – Stations hydrométriques utilisées sur le système Arros-Louet-Adour

(GRK) et un sous-modèle hydraulique (LRK) seront appliqués pour chaque sous-bassin. Le modèle complet du bassin versant sera obtenu par la combinaison des différents sous-modèles. Les sous-bassins de l'Arros et du Louet situés à l'amont des barrages ne sont pas considérés puisque non concernés par la gestion des deux barrages. De même, le sous-bassin de l'Adour situé à l'amont d'Estirac et le bassin des Lées, dont l'exutoire se situe au niveau de la station de Bernède, ne seront pas pris en compte dans le modèle ; on préférera utiliser directement la mesure de débit à l'exutoire de chacun d'eux.

Il en résulte un découpage du bassin versant en quatre sous-bassins amont exclus du système et six sous-bassins intermédiaires (figure 5.18), dont trois sur l'Arros, deux sur le Louet et un sur l'Adour. Le tableau 5.7 rassemble les caractéristiques des sous-bassins intermédiaires, soit les stations amont et aval, la surface drainée et la longueur du cours d'eau principal.

BV	Stations amont	Station aval	Surface (km ²)	Longueur du bief (km)
1	Barrage Arrêt-Darré	Villecomtal	422	23.3
2	Villecomtal	Juillac	113	20.9
3	Juillac	Izotges	328	20.5
4	Barrage Louet	Sombrun	72	18.0
5	Sombrun	Mazères	41	11.9
6	Estirac	Aire-sur-l'Adour	546	41.1

TABLEAU 5.7 – Caractéristiques des bassins intermédiaires

En outre, les courbes des surfaces drainées ont été tracées à partir d'un MNT pour les biefs considérés (figure 5.19), ce qui a permis d'extraire pour chaque sous-bassin les affluents drainant une surface supérieure à 25 % de la surface du sous-bassin. Un seul affluent a été détecté pour chacun des sous-bassins ; la position relative x_P et la surface relative S_P de ces affluents sont rapportées dans le tableau 5.8. Les bassins drainés par ces affluents seront considérés comme apports hydrologiques ponctuels dans le modèle hydraulique.

Enfin, les stations d'Izotges, de Mazères et de Bernède donnent les débits à l'exutoire des bassins de l'Arros, du Louet et des Lées respectivement. Ces débits seront injectés dans le bief de l'Adour en tant qu'apports latéraux ponctuels. La distance relative des confluences avec l'Adour est de 0.53 pour l'Arros, 0.25 pour le Louet et 0.99 pour les Lées.

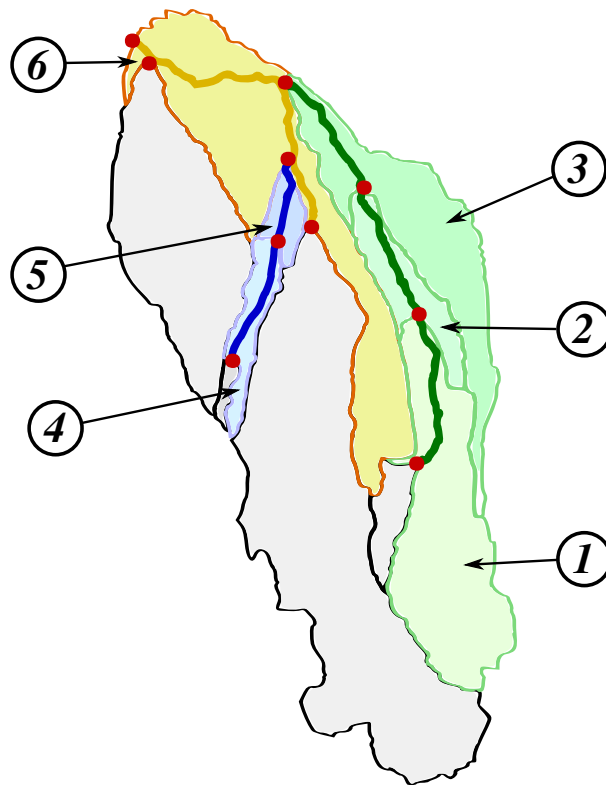


FIGURE 5.18 – Le système Arros-Louet-Adour : sous bassins amonts et intermédiaires

BV	1	2	3	4	5	6
x_P	0.18	0.00	0.07	0.39	0.63	0.07
S_P	0.76	0.27	0.73	0.32	0.33	0.32

TABLEAU 5.8 – Position et surface relatives des sous-bassins considérés en tant qu'apports latéraux ponctuels

5.3.3 Structure du modèle intégré

La structure du modèle intégré découle de la décomposition du bassin versant exposée précédemment. Le schéma fonctionnel est présenté sur la figure 5.20. Chaque bassin intermédiaire est représenté par un couple de sous-modèles hydrologique et hydraulique. Le sous-modèle hydrologique (GRK) reçoit les données de pluie et ETP en entrée et fournit un débit intégré comme apport latéral diffus et ponctuel dans le modèle hydraulique (LRK). Ce dernier prend également en entrée le débit à l'amont du sous-bassin, soit le débit aux barrages pour les BV 1 et 4, et le débit à Estirac pour le BV 6. Le module LRK du BV 6 prend comme entrées supplémentaires, en tant qu'apports latéraux ponctuels, les débits à l'exutoire des BV 3 (Arros) et 5 (Louet), ainsi que le débit à Bernède.

Les entrées du modèle TGR sont donc les pluies et ETP sur chaque bassin intermédiaire ainsi que les débits aux deux barrages, à Estirac et à Bernède. Les sorties sont les débits aux stations intermédiaires et aval. Enfin, les paramètres du modèle sont au nombre de 5 par sous-bassin, soit 30 au total.

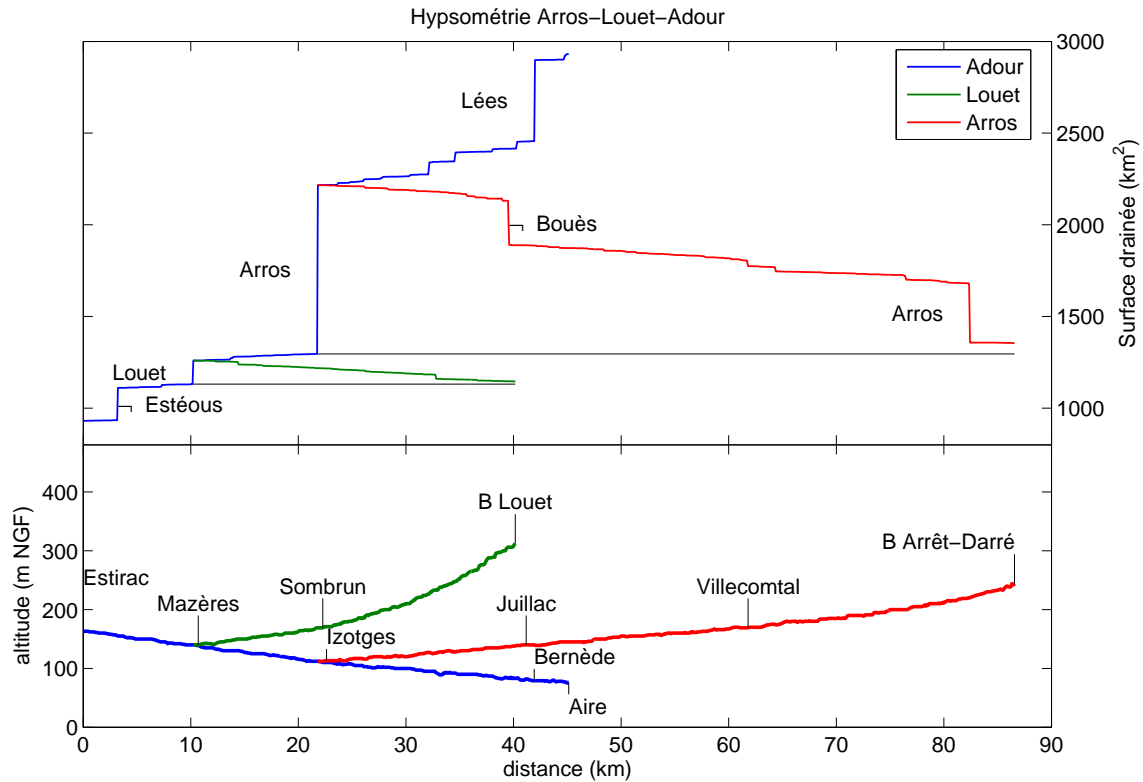


FIGURE 5.19 – Courbes des surfaces drainées et profils longitudinaux des biefs Arros, Louet et Adour

Les prélèvements pour l'irrigation étant répartis sur la quasi-totalité des trois biefs considérés, nous supposons qu'ils peuvent être représentés en tant que débits latéraux uniformément répartis. Nous utiliserons donc pour le module LRK la configuration avec la perturbation w présentée à la section 5.1. Notons que l'hypothèse d'uniformité pourrait être améliorée en utilisant une estimation plus fine de la répartition des surfaces irriguées, ce qui pourrait se faire à l'aide de données de télédétection par exemple. Toutefois, dans le cadre de la thèse, seuls les débits latéraux ponctuels et uniformément distribués ont été considérés.

5.3.4 Identification, validation

Procédure d'identification

Etant donné que l'on dispose, pour chaque sous-bassin, des données de pluie et ETP et des débits amont et aval, les paramètres seront calés indépendamment sur chacun des sous-bassins.

Dans cette application, on souhaite reconstituer les prélèvements pour l'irrigation, représentés par la perturbation w dans le module LRK. Cette perturbation est inconnue et sera reconstituée à l'aide d'observateurs d'état. Il est donc important que le modèle TGR représente la dynamique des écoulements sans prélèvements, de façon à ce que l'on puisse attribuer l'erreur du modèle à la présence de ces prélèvements. Pour ce faire, nous avons choisi de calculer le critère, lors de l'identification du modèle, sur les périodes hivernales uniquement. Ainsi l'influence des pré-

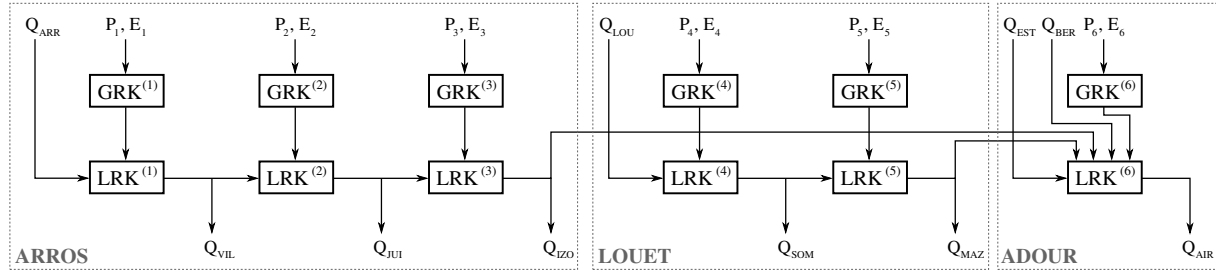


FIGURE 5.20 – Schéma fonctionnel du modèle TGR sur le système Arros-Louet-Adour

lèvements ne sera pas prise en compte par le modèle. En outre, les prélèvements se produisant en périodes de basses eaux, nous utiliserons le critère $RMSE_{\log}$ afin d'atténuer l'importance des crues. Il serait également possible d'exclure les périodes où le débit est important (par exemple supérieur à Q_{95}), mais nous avons préféré les garder car elles contribuent à définir la dynamique du système, et notamment celle du transfert hydraulique.

Il est à noter que le choix d'un calage restreint aux périodes hivernales présente un inconvénient incontournable : le régime de fonctionnement est potentiellement différent entre l'été et l'hiver, notamment en ce qui concerne les échanges avec la nappe représentés par le coefficient IGF .

La procédure d'identification se fera par la méthode de calage-contrôle croisé sur les périodes 1997-2000 (P1) et 2001-2004 (P2). La première année sera exclue du calcul du critère pour atténuer l'influence du remplissage initial du réservoir de production dans le module GRK. Les périodes de lacunes seront également exclues du calcul.

Résultats d'identification

Le tableau 5.9 présente les résultats d'identification pour chaque sous-bassin et chaque période de calage. Les critères de Nash sont également présentés pour les périodes d'identification et de validation. Un exemple de validation (crue d'avril 1998) est donné en figure 5.21.

Bassin	Calage sur	τ_0	K_0	K_R	S	IGF	Nash Id (%)	Nash Va (%)
1	P1	5.0	4.9	102.2	354	0.540	50.0	62.4
	P2	9.0	1.0	98.5	645	0.670	58.7	47.5
2	P1	2.0	9.8	99.5	408	0.497	85.6	71.8
	P2	3.0	9.8	64.9	401	0.478	72.7	86.6
3	P1	7.0	2.1	70.0	401	0.471	91.2	95.2
	P2	2.0	9.7	101.1	397	0.497	94.5	90.2
4	P1	14.0	1.0	79.9	322	0.626	51.5	43.1
	P2	14.0	1.0	69.7	384	0.561	37.2	41.7
5	P1	0.0	4.5	359.3	6900	1.038	85.0	88.6
	P2	0.0	4.6	499.5	13660	0.695	90.2	74.1
6	P1	11.1	1.0	69.7	388	1.510	83.7	92.6
	P2	15.8	2.0	69.9	415	1.416	89.8	84.4

TABLEAU 5.9 – Résultats d'identification pour chaque sous-bassin avec les deux configuration de calage-contrôle (P1P2 et P2P1)

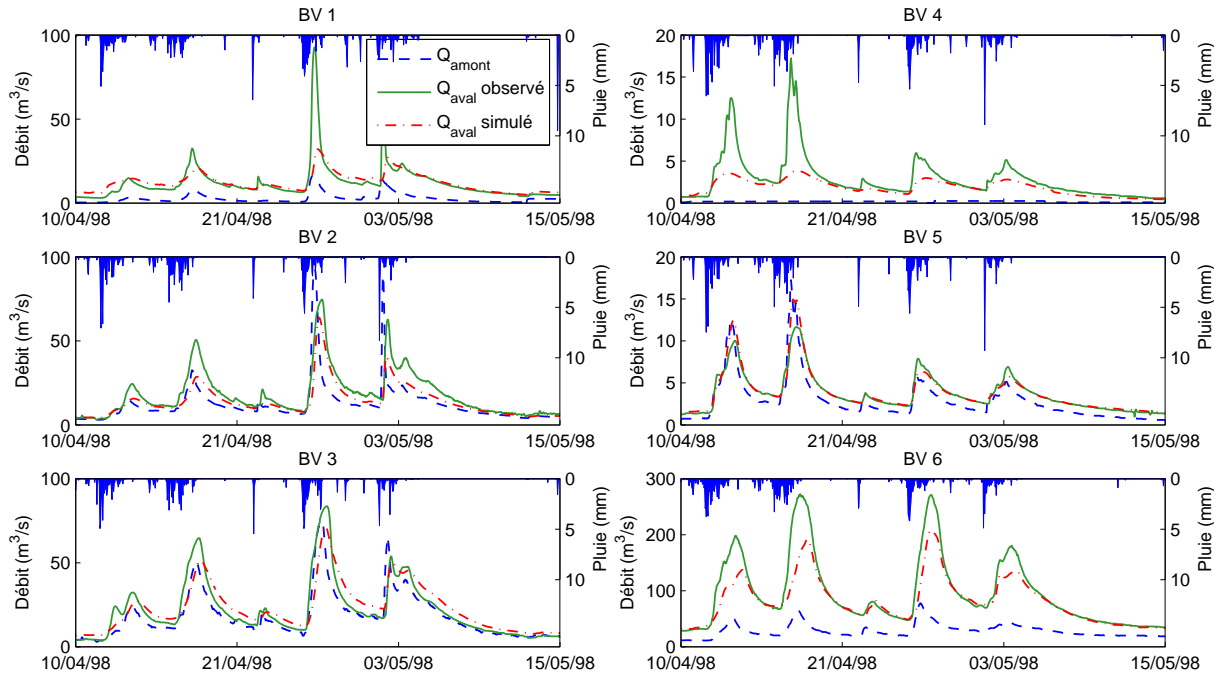


FIGURE 5.21 – Résultat de validation pour la crue de mars 1998 (calage sur P2)

Ces résultats révèlent des performances assez moyennes sur les BV 1 et 4. Pour ces deux bassins, on peut voir sur la figure 5.21 que le débit amont est très faible comparé aux apports intermédiaires. Or le module hydrologique du modèle TGR a été obtenu par la simplification d'un modèle hydrologique déjà simple, ce qui peut expliquer les performances limitées du modèle TGR en l'absence d'apports hydrauliques (débit amont). Les faibles valeurs du débit amont peuvent poser des problèmes d'identifiabilité des paramètres τ_0 et K_0 . Toutefois, on peut vérifier que la somme $\tau_0 + K_0$ reste à peu près constante, somme utilisée pour le calcul de K_U correspondant aux apports latéraux diffus qui représentent la part la plus importante des apports hydrologiques. De même que pour le BV 6, la valeur très faible du paramètre K_0 peut s'expliquer par un débit amont très faible par rapport aux apports intermédiaires, le modèle ayant alors tendance à amortir au minimum le débit amont.

Notons que sur le BV 1, il existe une station hydrométrique située sur l'Arros à l'amont immédiat de la confluence avec l'Arrêt-Darré. Les données en débit à cette station auraient certainement permis d'améliorer très sensiblement la reproduction du débit à l'aval du BV 1, car elles auraient permis de convertir environ la moitié des apports hydrologiques en apports hydrauliques. Dans le cadre de ces travaux, nous ne disposons malheureusement pas de ces données.

Les autres sous-bassins présentent des performances tout-à-fait acceptables (supérieures à 70 %), voire très bonnes (supérieures à 90 %) pour les BV 3 et 6.

On peut remarquer que, mises à part quelques exceptions, les valeurs des paramètres varient peu suivant la période de calage, ce qui permet de vérifier leur cohérence. Globalement, sur l'Arros et le Louet (BV 1 à 5), environ la moitié de l'eau apportée par les pluies s'échappe par la nappe (paramètre IGF de l'ordre de 0.5). Au contraire, sur l'Adour, le tiers des apports hydrologiques

provient de la nappe.

Sur le Louet, entre Sombrun et Mazères (BV 5), les paramètres présentent des valeurs particulières : le retard τ_0 est nul, l'amortissement des apports hydrologiques (K_R) est important et la capacité du réservoir de production (S) est très grande. Ceci correspond à des apports hydrologiques très faibles (ce que l'on peut vérifier sur la figure) sur un bassin très court (2 à 3 fois plus court que les autres).

Enfin, on voit clairement sur les graphes que les périodes de basses eaux ont été privilégiées lors de l'identification.

5.3.5 Observateurs d'état pour la reconstitution de prélèvements

Les paramètres du modèle TGR ayant été identifiés, nous présentons ici les résultats de l'application du filtre de Kalman et de la création d'un observateur d'état représentant les prélèvements pour l'irrigation.

Filtre de Kalman

Pour calculer le gain optimal de Kalman (matrice K), nous avons choisi des coefficients de pondération de 0.5 pour tous les états hydrauliques et hydrologiques, et de 4 pour les perturbations. A travers ces valeurs, nous supposons donc que l'erreur commise lors de la simulation des débits à l'aval de chaque sous-bassin provient essentiellement d'un débit latéral uniformément distribué non pris en compte. Ainsi, lors de la mise à jour des états internes du système, les états les plus corrigés seront ceux correspondant aux perturbations w .

La figure 5.22 présente les débits simulés avec et sans recalage comparés aux mesures sur la première quinzaine d'août 2001. Le débit recalé présente un Nash de 100 %, ce qui montre que les corrections apportées sur les états du système ont permis de retrouver exactement le débit mesuré. Une part importante de ces corrections ont été effectuées sur la perturbation w , analysée dans la partie suivante.

Extraction des prélèvements

Dans la structure du modèle LRK présentée sur la figure 5.3, la perturbation w se présente sous la forme d'un débit latéral uniformément distribué. Dans le cas du bassin amont de l'Adour en période d'étiage, ce débit latéral peut correspondre aux prélèvements pour l'irrigation, mais également à un débit d'échange entre la nappe et la rivière. En effet, dans le modèle intégré TGR, les échanges avec la nappe sont pris en compte à travers le paramètre d'échange IGF . Cependant ce paramètre est un coefficient multiplicatif sur la pluie nette issue du réservoir de production. Ainsi, il traduit plus la réaction de la nappe à un événement pluvieux que les échanges entre la nappe et la rivière (le bief principal étant traité dans le module hydraulique et non dans le module hydrologique).

La perturbation w peut donc représenter à la fois les prélèvements et les échanges avec la nappe. Pour séparer ces deux composantes, nous utilisons leurs propriétés fréquentielles. Les écoulements dans la nappe se font à des vitesses bien plus faibles que dans un bief de rivière. Les fréquences

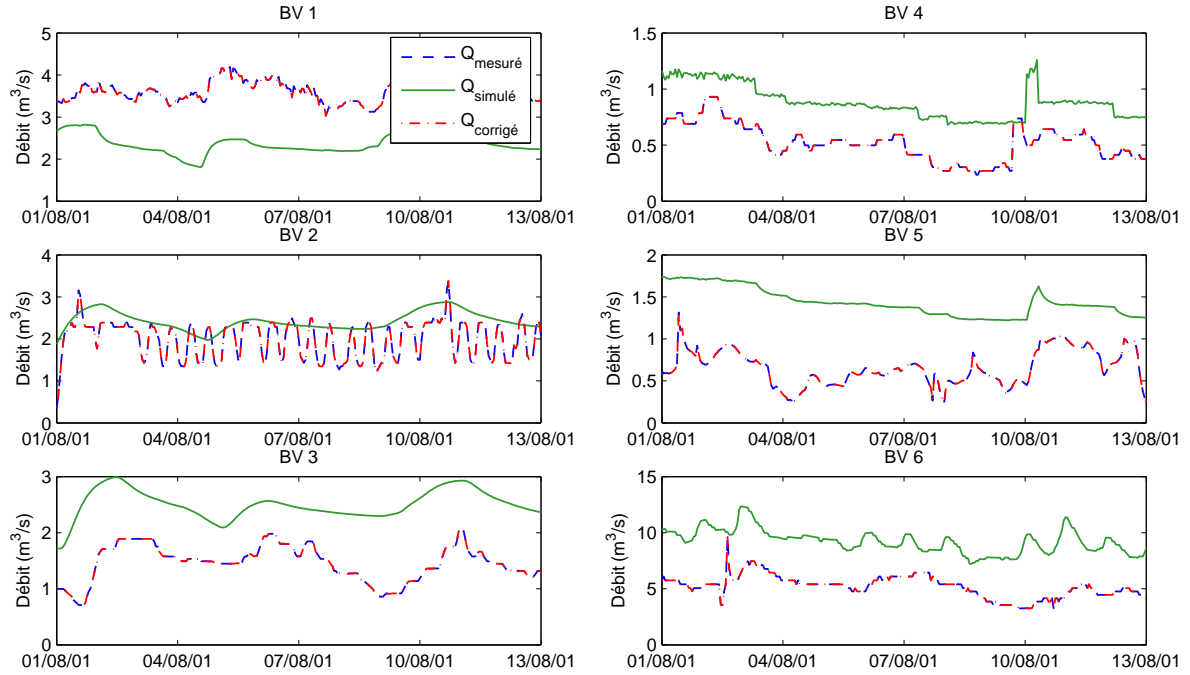


FIGURE 5.22 – Comparaison des débits simulés et recalés par le filtre de Kalman avec les mesures (les valeurs mesurées et corrigées se superposent presque parfaitement)

correspondant aux échanges entre la nappe et la rivière seront donc les basses fréquences (BF). Au contraire, les prélèvements sont effectués par la mise en route et l'arrêt du système d'irrigation. En général, les irrigants procèdent à ces opérations quotidiennement, ce qui correspond à des fréquences plus élevées (HF).

Nous appliquerons donc un filtre fréquentiel sur la perturbation w afin d'en extraire les composantes HF, correspondant aux prélèvements, et BF, correspondant aux échanges avec la nappe. La période de coupure K_w entre hautes et basses fréquences a été choisie à 1.5 jours, en partant du principe que les périodes relatives aux prélèvements ne dépassent pas 1 jour. La figure 5.23 illustre le principe du filtre BF-HF appliqué sur la perturbation w . La composante BF est notée w_{BF} et la composante HF w_{HF} .

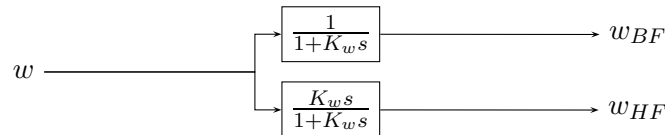


FIGURE 5.23 – Filtre fréquentiel appliqué sur la perturbation w pour en extraire les composantes BF et HF

La décomposition en composantes BF et HF de la perturbation reconstituée est présentée sur la figure 5.24 pour la même période de début août 2001. On peut voir que la w_{HF} présente les variations rapides alors que w_{BF} présente les variations lentes.

L'inconvénient de cette méthode est que la composante HF ne possède plus aucune basses fréquences, et le signal w_{HF} se retrouve donc centré autour de la valeur nulle. On observe alors

aussi bien des valeurs positives que négatives, et w_{HF} ne peut correspondre directement aux prélèvements (qui ne peuvent être que négatifs). Il faudrait pour cela ajouter une composante basse fréquence traduisant le débit moyen prélevé. Cette composante pourrait par exemple être calculée à partir d'un modèle de demande fonctionnant au pas de temps journalier.

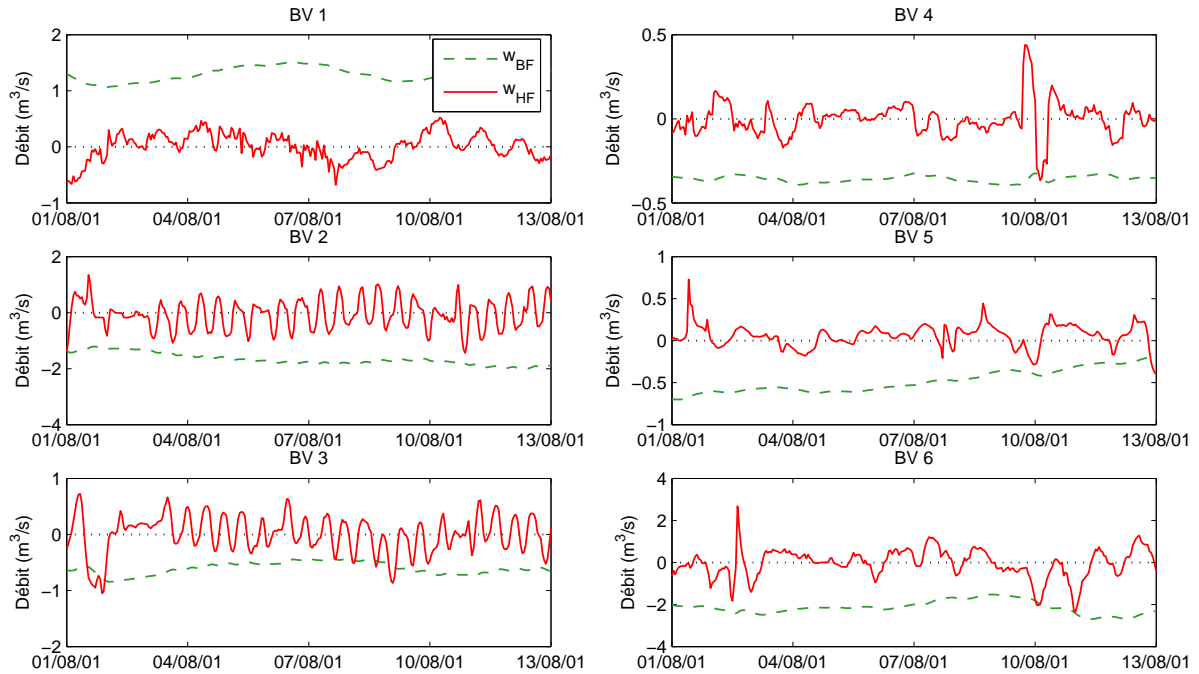


FIGURE 5.24 – Reconstitution de la perturbation associée à un débit latéral diffus. Composantes haute fréquence (HF) et basse fréquence (BF)

Toutefois, on peut observer sur la composante w_{HF} des cycles de période 12 h sur les BV 2 et 3 et de période 24 h sur les autres BV. Ces cycles semblent liés à une activité anthropique et correspondent certainement aux cycles quotidiens (ou semi-quotidiens) des prélèvements. Ces fréquences particulières sont mises en évidence sur la figure 5.25 qui présente les décompositions spectrales de w_{HF} pour chaque sous-bassin.

Il est à noter que les pics correspondant à des périodes de 12 h ou 24 h, très marqués sur la figure 5.25, sont pour la plupart difficiles à distinguer sur la décomposition spectrale du signal mesuré, à savoir les débits aux différentes stations de mesure (figure 5.26) car elles sont en quelque sorte noyées au milieu des fréquences relatives aux phénomènes hydrauliques et hydrologiques. Ces fréquences particulières ont donc été mises en évidence grâce à la création d'un observateur d'état sur le modèle intégré TGR, ce qui constitue un résultat important de la thèse. Les fréquences correspondant à la dynamique de transformation de la pluie en débit ainsi qu'au transfert du débit amont ont pu être retirées du signal du débit aval pour obtenir les fréquences caractéristiques de la perturbation w .

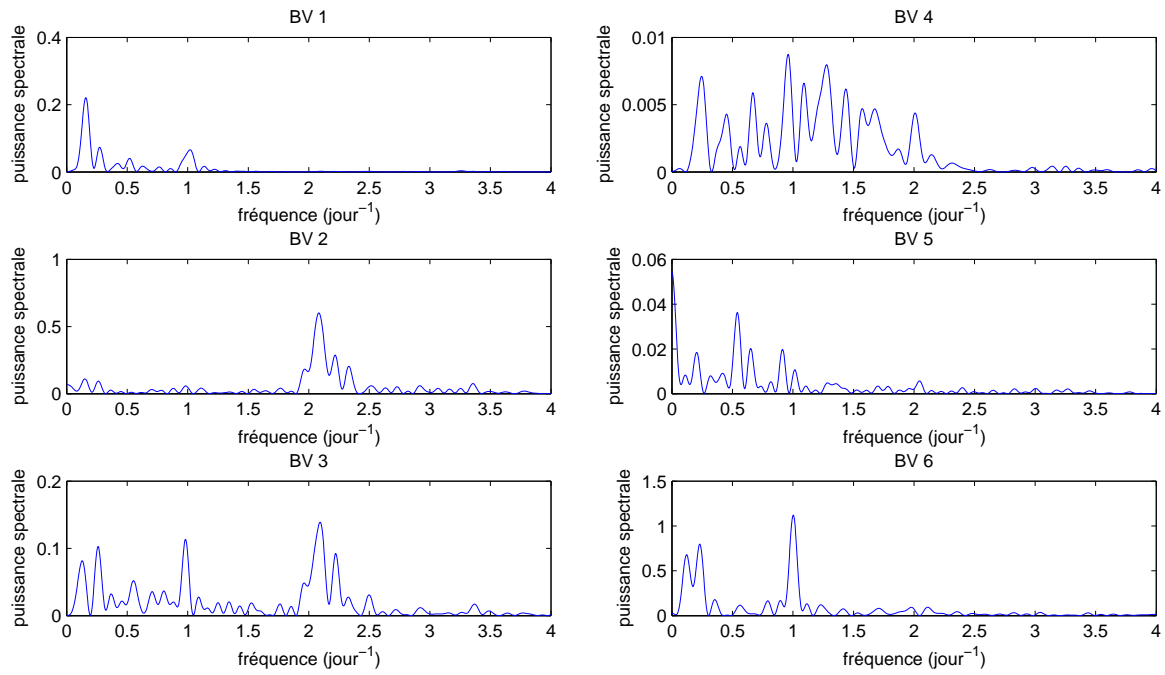


FIGURE 5.25 – Analyse spectrale de la composante HF de la perturbation

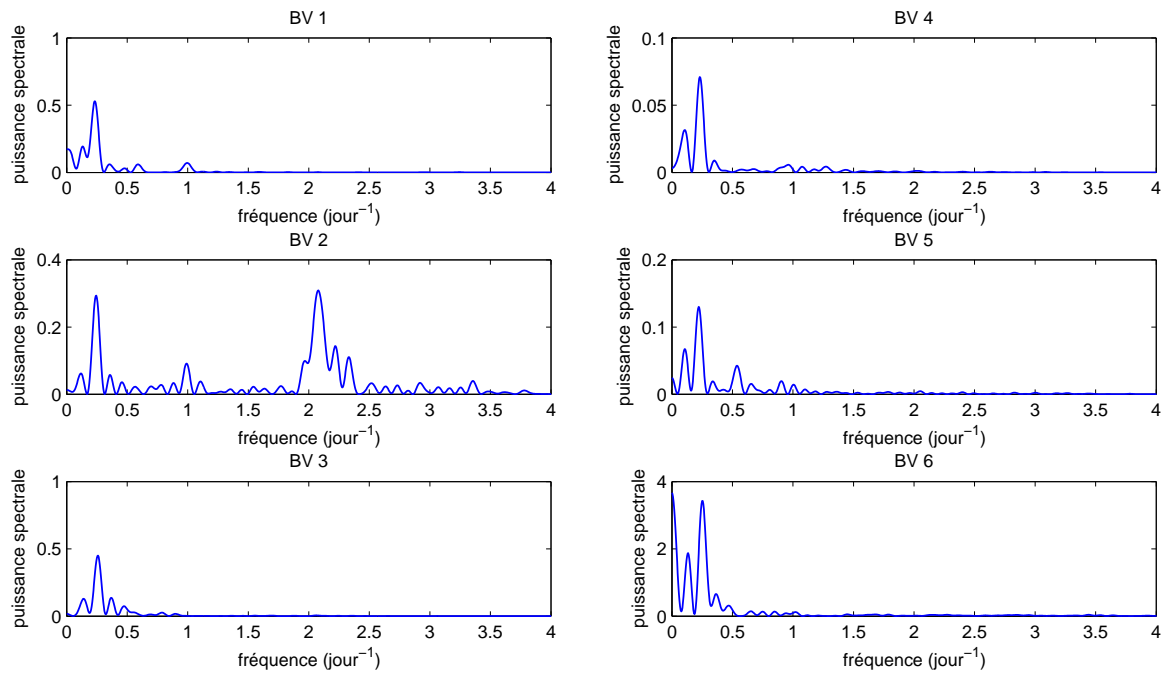


FIGURE 5.26 – Analyse spectrale de la composante HF de la mesure

5.3.6 Conclusion

Pour le gestionnaire chargé de maintenir des débits minimum dans les cours d'eau tout au long de la saison estivale, la connaissance des différents transferts dans le bassin versant est primordiale. Les modèles utilisés aujourd'hui par les gestionnaires permettent de prendre en compte la dynamique de propagation d'un débit lâché depuis les vannes d'un barrage-réservoir afin de réalimenter le cours d'eau. Les apports hydrologiques peuvent également être appréhendés par l'utilisation de modèles hydrologiques tels que les modèles globaux de type GR. Par contre, la connaissance des débits prélevés pour les différents usages, dont l'irrigation, et leur impact sur l'écoulement dans le cours d'eau restent limités, notamment à cause du manque de données de prélèvements dont dispose le gestionnaire.

Nous avons vu dans cette application qu'il est possible d'appréhender ces prélèvements par l'utilisation d'un observateur d'état avec le modèle TGR couplé à un algorithme d'assimilation de données de type filtre de Kalman. Les résultats ont permis de reconstituer les chroniques d'un débit latéral diffus que nous avons supposé correspondre aux échanges entre la nappe et la rivière ainsi qu'aux prélèvements effectués par les irrigants. Les premiers étant de nature plutôt lente par rapport aux seconds, un filtre fréquentiel a été appliqué sur le débit latéral reconstitué, ce qui a permis de dégager des fréquences caractéristiques pouvant correspondre à des pratiques journalières des irrigants (mise en route et arrêt quotidiens des installations de pompage), fréquences difficiles à distinguer directement sur la plupart des débits mesurés. Néanmoins, la méthode ne permet pas de reconstituer quantitativement les prélèvements car ceux-ci présentent également des fréquences basses indissociables de celles des échanges avec la nappe. Ce dernier point pourrait être amélioré par l'intégration d'un module de demande dans le modèle TGR, perspective présentée dans le chapitre 6.

Enfin, l'interprétation des résultats d'identification a permis, comme dans le cas de la prévision des crues sur le Serein (voir 5.2), d'analyser le comportement hydrologique et hydraulique du bassin versant étudié. Cette possibilité d'interprétation qu'offre le modèle TGR est un atout non négligeable pour des applications opérationnelles.

Chapitre 6

Conclusions générales et perspectives

6.1 Synthèse des différents chapitres

L'objectif principal de la thèse était d'établir une méthodologie de synthèse d'un modèle intégré des écoulements dans un bassin versant répondant aux contraintes imposées par le contexte de la gestion en temps réel. Trois points forts se dégagent des travaux présentés au cours des différents chapitres :

- la modélisation du transfert de débit dans un cours d'eau,
- l'intégration hydraulique-hydrologique pour la gestion en temps réel,
- la synthèse d'observateurs d'états pour la reconstitution des prélèvements.

6.1.1 Modélisation du transfert de débit dans un cours d'eau

Malgré la multitude de modèles hydrauliques que l'on peut trouver dans la littérature, nous avons fait le choix de développer une approche spécifique au contexte d'intégration pour la gestion en temps réel. Ce choix, motivé initialement par le fait que les modèles existants sont peu adaptés à la mise en œuvre de contrôleurs automatiques, a conduit à l'élaboration d'une méthodologie de synthèse d'un modèle hydraulique distribué de type fonction de transfert simplifiée (premier ordre avec retard) prenant en compte indépendamment les débits amont et latéraux (ponctuels ou uniformément distribués).

Ce modèle, établi à partir de simplifications (linéarisation, approximation basse fréquence) des équations de Saint-Venant transposées dans le domaine fréquentiel, a été validé dans un premier temps par des exemples théoriques et le logiciel SIC de résolution numérique des équations physiques. La pertinence de l'approche a ensuite pu être vérifiée sur des cas réels avec une procédure d'identification fréquentielle (Sacramento) et la synthèse d'un contrôleur en boucle ouverte (Gignac).

L'approche physique a permis d'aborder les notions de bief équivalent (illustré sur le cas de Gignac) et de cohérence physique entre pas de temps et pas d'espace, et d'étudier l'influence des ouvrages en travers sur la dynamique d'écoulement (modèle LBLR). En outre, cette approche offre des possibilités d'interprétation des résultats particulièrement intéressantes pour des applications opérationnelles.

Par ailleurs, nous avons également suivi une approche adimensionnelle permettant une réduction importante du nombre de paramètres décrivant le modèle ; ainsi la version LLR du modèle hydraulique décrit les transferts des débits amont et latéraux à partir de deux paramètres uniquement. Le cas de Sacramento (chapitre 4) a permis d'illustrer l'intérêt de cette réduction en termes d'identifiabilité. De plus, des coefficients de non uniformité ont été introduits grâce à l'approche adimensionnelle, permettant d'affiner la notion de bief équivalent avec la prise en compte de rupture de pente ou de changement de régime de linéarisation.

Enfin, la méthode permet de fournir des formules analytiques simples potentiellement très utiles en contexte opérationnel, comme par exemple le calcul du temps de réponse ou l'étude des effets *feedback* et *backwater* dus à la présence d'ouvrages en travers. Ces points n'ont pas été développés dans ce document mais sont détaillés dans les articles fournis en annexe.

6.1.2 Intégration hydraulique-hydrologique pour la gestion en temps réel

Le chapitre 2 a permis de décrire le système considéré dans cette thèse, constitué par le bassin versant intermédiaire et les transferts hydrauliques, hydrologiques et relatifs à la demande (figure 6.1).

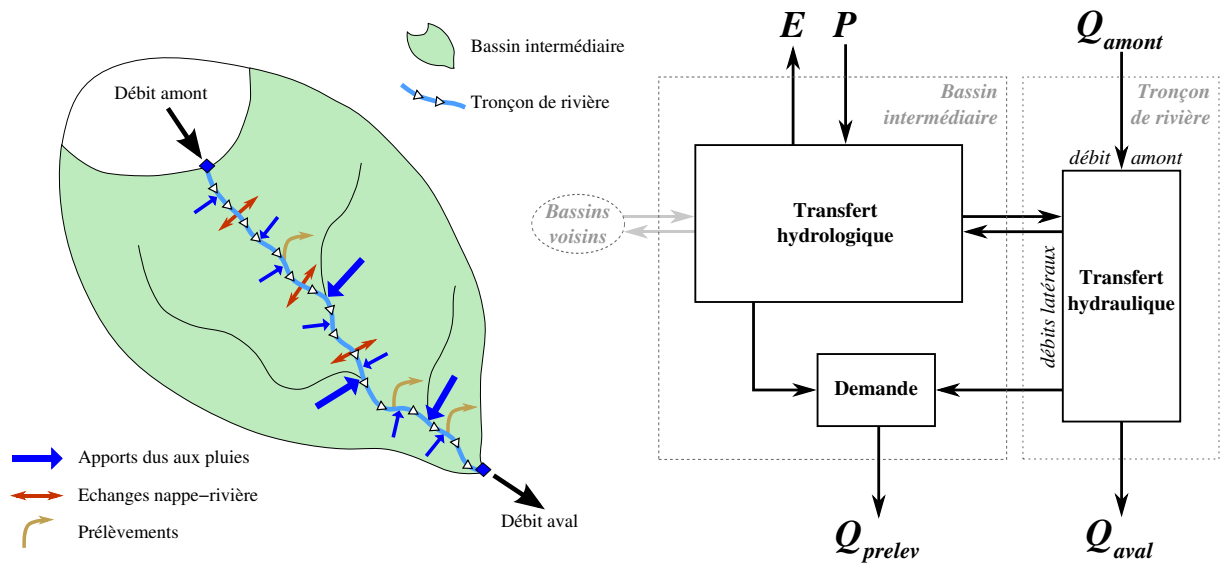


FIGURE 6.1 – Transferts dans le bassin versant intermédiaire

Cette vision a conduit au choix d'une approche semi-distribuée pour l'intégration hydraulique-hydrologique avec un découpage spatial en sous-bassin basé sur les courbes de surfaces drainées (Lerat, 2009). La partie hydrologique du modèle intégré, issue d'une adaptation des modèles conceptuels globaux de type GR développés par le Cemagref, est appliquée sur chaque sous-bassin pour fournir au modèle hydraulique plusieurs débits latéraux sous forme ponctuelle ou uniformément répartie.

En outre, nous avons relié le contexte de gestion en temps réel entre autres à l'utilisation d'algorithmes d'assimilation de données. Le module de routage du modèle hydrologique a alors été linéarisé de façon à pouvoir intégrer des états hydrologiques à la partie linéaire du modèle, sur

laquelle a été appliqué le filtre de Kalman.

La validation du modèle intégré a été effectuée sur différents bassins versants réels à partir de chroniques réelles de débits, pluies et ETP (bassins du Tarn, de l'Aveyron, de la Loue, du Serein et de l'Adour). Une procédure de calage-contrôle croisée a été utilisée afin de vérifier la consistance des paramètres, et un échantillonnage préalable de l'espace des paramètres a permis de contourner d'éventuels problèmes d'identifiabilité. En outre, les résultats de simulation sur les différents cas d'étude ont conduit à l'élaboration d'un critère de découpage du bassin intermédiaire, et ont mis en évidence les larges possibilités d'interprétation qu'offre la méthode.

Enfin, dans le chapitre 5, nous avons proposé une méthode d'assimilation de données basée sur le filtre de Kalman, puis implémenté cette méthode pour la prévision des crues sur le bassin du Serein. Les résultats ont permis de valider l'approche par une amélioration significative de la prévision (par rapport au modèle global GR3P utilisé actuellement par le service de prévision des crues) pour des horizons inférieurs au temps de transfert dans le cours d'eau. Cette amélioration peut être imputée à l'intégration des mesures de débits intermédiaires et à la mise en œuvre d'une méthode d'assimilation plus élaborée.

6.1.3 Observateurs d'états pour la reconstitution des prélèvements

Dans le contexte de la gestion des étiages, le manque de données de prélèvements rend difficile l'utilisation de modèles de demande. Aussi avons-nous proposé une méthode de reconstitution de ces prélèvements à travers la synthèse d'observateurs d'états, permettant une compréhension approfondie du système par le gestionnaire et potentiellement le calage de modèles de demande. Une première approche appliquée sur le cas du canal de Gignac, a permis de reconstituer de manière très simple (à travers un gain statique) l'évolution des débits prélevés aux prises latérales en fonction des variations du niveau d'eau dans le canal. Dans un deuxième temps, la synthèse d'observateurs d'états, rendue possible par l'utilisation du filtre de Kalman, a été validée sur le bassin amont de l'Adour géré par la CACG. La synthèse d'un observateur d'état a permis d'extraire du signal de débit mesuré les phénomènes hydrauliques et hydrologiques. L'analyse du résidu a mis en évidence des fréquences caractéristiques de cycles journaliers correspondant aux pratiques d'irrigation (mise en route et arrêt quotidiens des pompes). Il est important de noter que ces fréquences étaient pour la plupart difficiles à distinguer directement dans les signaux de débit mesurés. Ces résultats constituent ainsi une avancée capitale pour la prise en compte des prélèvements dans un modèle intégré pour la gestion opérationnelle des étiages.

6.2 Perspectives envisagées

Nous présentons dans cette dernière partie quelques perspectives qui nous paraissent intéressantes au vu des résultats présentés dans cette thèse. Ces perspectives concernent des développements théoriques et applications opérationnelles dans les contextes de gestion des crues et gestion des étiages.

6.2.1 Gestion des crues

Développements théoriques

Extension au non linéaire

Tout au long de nos travaux, l'hypothèse de linéarité a été largement exploitée dans le souci d'établir un modèle simple et robuste adapté aux nombreux outils de l'automatique linéaire. Or malgré l'efficacité des modèles linéaires, cette hypothèse constitue une hypothèse forte dans le double contexte hydraulique et hydrologique. En effet, le retard hydraulique est connu pour dépendre, parfois fortement, du débit dans le bief ; dans le même temps, les phénomènes hydrologiques de production de la pluie nette ou les effets de débordements lors du remplissage des réservoirs sols (effets de seuil) sont fortement non linéaires. Les travaux de Litrico (1999), Litrico (2001b) et Litrico et Pomet (2003) ont conduit à la synthèse d'un modèle non linéaire simplifié du transfert d'un débit amont. Ce modèle pourrait être étendu au cas des débits latéraux puis intégré dans un modèle couplé hydraulique-hydrologique complètement non linéaire permettant de représenter plus finement les phénomènes de création et de propagation des crues.

Ce type de modèle pourrait également être utilisé avec des algorithmes existants d'assimilation de données, notamment les extensions du filtre de Kalman, telles que le filtre de Kalman étendu ou le filtre de Kalman d'ensemble. Les travaux de Litrico (2001a) pourraient servir de base à l'application du filtre de Kalman étendu (EKF) sur le modèle hydraulique non linéaire. Pour le modèle hydrologique, nous pourrions appliquer le filtre de Kalman d'ensemble en nous appuyant sur les travaux de Evensen (1994) ou ceux plus récents de Romanowicz *et al.* (2006); Strub *et al.* (2009).

Approche distribuée

Compte tenu de la progression rapide des performances informatiques, il paraît raisonnable de penser que les futures systèmes de gestion en temps réel seront capables d'intégrer des modèles de plus en plus complexes et des données de plus en plus nombreuses. Ceci permet d'envisager une plus large utilisation des modèles distribués en contexte opérationnel, avec notamment l'utilisation de données météorologiques radar ou l'imagerie satellitale pour les zones de débordement. Toutefois, des algorithmes spécifiques d'assimilation de données devront être utilisés afin de gérer un volume important de données sans dépasser les temps de calcul requis pour la gestion en temps réel, on pourra par exemple s'orienter vers les méthodes variationnelles (Estupina-Borrell *et al.*, 2006). En outre, compte tenu du nombre d'états et de paramètres à identifier, une attention particulière devra être portée sur les problèmes d'identifiabilité et de robustesse.

Les approches distribuées permettraient enfin la reconstitution de débits intermédiaires en des points stratégiques ne disposant d'aucune mesure, évitant ainsi l'installation et la maintenance d'un nombre important de capteurs.

Applications opérationnelles

Nous avons proposé dans le chapitre 5 une application de la méthode à la prévision des crues sur le bassin du Serein, sans toutefois développer l'incertitude de la prévision inhérente à la prévision météorologique et aux incertitudes de modèle. La propagation des incertitudes dans le modèle intégré pourrait être traduite en termes d'intervalles de confiance sur le débit aval prévu. Une méthodologie rigoureuse doit être développée, par exemple à partir de l'étude de la propagation des incertitudes et les outils statistiques.

Enfin, il pourrait être envisagé d'étendre l'utilisation des observateurs d'états au cas des crues, notamment pour la reconstitution de transferts non jaugés tels que les échanges entre la nappe et la rivière.

6.2.2 Gestion des étiages

Développements théoriques

Extension au non linéaire

De même que pour la gestion des crues, l'extension du modèle au non linéaire semble une perspective intéressante, notamment pour tenir compte des variations du retard avec les débits, potentiellement aussi importantes, en valeur relative, qu'en cas de crue. Comme pour les travaux que nous avons développés, les méthodes de modélisation et d'assimilation de données pourraient être les mêmes que pour la gestion des crues.

Intégration d'un module de demande

Les résultats de la partie 5.3 constituent des résultats préliminaires à l'intégration dans le modèle TGR d'un module de demande permettant de prendre en compte directement les prélèvements pour l'irrigation.

L'intégration d'un module de demande pourrait se faire en deux temps. Tout d'abord, une approche grossière permettrait de prendre en compte les besoins journaliers (voire hebdomadaire). Il s'agirait alors de coupler au modèle intégré un modèle basé sur les bilans hydriques, tel que les modèles CROPWAT (Smith, 1992), PILOTE (Mailhol *et al.*, 1997) ou ADEAUMIS (Leenhardt *et al.*, 2004a,b), prenant comme entrées les données climatiques (pluies, ETP et température), des caractéristiques pédologiques (réserve utile) et agronomiques traduisant la phénologie de la plante (phase de développement au cours de la saison) et la sensibilité au stress hydrique. Dans un deuxième temps, une approche plus fine permettrait de prendre en compte l'évolution des prélèvements au cours de la journée. Des modèles basés sur le comportement des irrigants à travers des règles d'action (Lamacq, 1997; Labbé *et al.*, 2000) ou sur des distributions journalières statistiques pourraient être utilisés.

Suivant le modèle utilisé, différents types de données seront requises, telles que l'occupation des sols, la réserve utile ou des règles d'action obtenues par exemple par le biais de questionnaires sur les pratiques d'irrigation. Des algorithmes d'assimilation de données devront également être implémentés pour une utilisation en contexte opérationnel, prenant en compte les états supplémentaires relatifs au modèle de prélèvements.

Approche distribuée

Les approches distribuées ont aussi leur intérêt pour la gestion des étiages. Elles permettraient notamment d'affiner la répartition spatio-temporelles des prélèvements à partir de données issues de la télédétection pour l'évolution des cultures et des surfaces irriguées, ou du développement futur de capteurs capables de télétransmettre des données de prélèvements à un pas de temps fin.

En outre, distribuer les transferts hydrologiques et les prélèvements le long du cours d'eau permettrait d'identifier des à-secs potentiels en différents points du tronçon.

Applications opérationnelles

Dans nos travaux, nous avons développé un contrôleur en boucle ouverte à partir du modèle hydraulique sur un bief du canal d'irrigation de Gignac. Les résultats de cette application nous encourage à poursuivre le développement de contrôleurs pour la commande des systèmes barrage-rivière à partir du modèle intégré TGR.

Ce travail nécessite de porter une attention particulière à la robustesse (au sens automatique), mais pourrait conduire à une gestion intégrée et automatisée de systèmes tels que le bassin versant amont de l'Adour. Une amélioration significative de l'efficacité hydraulique de la gestion pourrait en être attendue.

Bibliographie

- ANDERSON, J. (2001). An ensemble adjustment Kalman filter for data assimilation. *Monthly Weather Review*, 129(12):2884–2903.
- ANDERSON, M. G. et BURT, T. P. (1985). *Hydrological forecasting*. Wiley.
- ARNOLD, J., SRINIVASAN, R., MUTTIAH, R. et WILLIAMS, J. (1998). Large area hydrologic modeling and assessment part I : Model development. *Journal of the American Water Resources Association*, 34(1):73–89.
- BALOGUN, O., HUBBARD, M. et DEVRIES, J. (1988). Automatic control of canal flow using linear quadratic regulator theory. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2(1):75–102.
- BATES, B., KUNDZEWICZ, Z., WU, S. et PALUTIKOF, J. (2008). Climate Change and Water. Rapport technique, Intergovernmental Panel on Climate Change, IPCC Secretariat, Geneva. 210p.
- BAUME, J.-P., MALATERRE, P.-O., BELAUD, G. et LE GUENNEC, B. (2005). SIC : a 1D Hydrodynamic Model for River and Irrigation Canal Modeling and Regulation. *Métodos Numéricos em Recursos Hidricos*, 7:1–81.
- BAUME, J.-P., SAU, J. et MALATERRE, P.-O. (1998). Modeling of irrigation channel dynamics for controller design. In *Conference on Systems, Man and Cybernetics, SMC'98, San Diego, CA*, page 3856–3861.
- BELANGER, E. et VINCENT, A. (2005). Data assimilation (4D-VAR) to forecast flood in shallow-waters with sediment erosion. *Journal of Hydrology*, 300:114–125.
- BENTURA, P. L. F. et MICHEL, C. (1997). Flood routing in a wide channel with a quadratic lag-and-route method. *Hydrological Sciences*, 42(2):169–189.
- BEVEN, K. (1989). Changing ideas in hydrology - The case of physically-based models. *Journal of Hydrology*, 105(1-2):157–172.
- BEVEN, K. (1993). Prophecy, reality and uncertainty in distributed hydrological modelling. *Advances in Water Resources*, 16(1):41–51.
- BEVEN, K. (2000). *Rainfall-Runoff Modelling : The Primer*. Wiley.

- BEVEN, K. (2006). A manifesto for the equifinality thesis. *Journal of Hydrology*, 320(1-2):18–36.
- BEVEN, K. et BINLEY, A. (1992). The future of distributed models : model calibration and uncertainty prediction. *Hydrological Processes*, 6(3):279–298.
- BISHOP, C., ETHERTON, B. et MAJUMDAR, S. (2001). Adaptive sampling with the ensemble transform Kalman filter Part I : Theoretical aspects. *Monthly Weather Review*, 129(3):420–436.
- BONTRON, G. (2004). *Prévision quantitative des précipitations : adaptation probabiliste par recherche d'analogues. Utilisation des Réanalyses NCEP / NCAR et application aux précipitations du Sud-Est de la France*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- BRIGHAM, E. (1988). *The Fast Fourier transform and its applications*. Prentice-Hall.
- BROWN, R. et HWANG, P. (1992). *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*. John Wiley & Sons, Inc., 2e édition.
- BRYSON, A. et HO, Y.-C. (1969). *Applied optimal control*. Blaisdell Publishing Company.
- BURNASH, R. (1995). The NWS river forecast system - Catchment modeling. *Computer Models of Watershed Hydrology*, pages 311–366.
- BURT, C. M. (1987). Overview of canal control concepts. In *Planning, Operation, Rehabilitation and Automation of Irrigation Water Delivery Systems, Proceedings of a Symposium. Held at the ASCE Irrigation and Drainage Division Specialty Conference*, pages 81–109, Portland, OR, USA. ASCE.
- CASTAINGS, W., DARTUS, D., HONNORAT, M., LE DIMET, F., LOUKILI, Y. et MONNIER, J. (2006). Automatic differentiation : a tool for variational data assimilation and adjoint sensitivity for flood modeling. *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, 50:249–262.
- CEMAGREF (1997). Régulation et gestion des canaux à surface libre. Inventaire des canaux d'irrigation à surface libre dans le sud de la France. Enquête et étude des pratiques de régulation et des performances des canaux à but agricole. Rapport technique, DERF, Cemagref - Ministère de l'Agriculture et de la Pêche.
- CEMAGREF (2005). Inventaire et diagnostic des modèles simples de prévision des crues déjà existants sur le bassin de la Seine. Rapport technique, Cemagref, DIREN Ile-de-France, Antony.
- CLOKE, H. et PAPPENBERGER, F. (2009). Ensemble flood forecasting : A review. *Journal of Hydrology*, 375(3-4):613–626.
- COURTIER, P. et TALAGRAND, O. (1990). Variational assimilation of meteorological observations with the direct adjoint shallow water equations. *Tellus 42A*, pages 531–549.

- CUNGE, J. A., HOLLY JR, F. M. et VERWEY, A. (1980). Practical aspects of computational river hydraulics. *Pitman Advanced Publishing Program*.
- DA ROS, D. et BORGA, M. (1997). Adaptive use of a conceptual model for real time flood forecasting. *Nordic Hydrology*, 28(3):169–188.
- DI MEGLIO, F., RABBANI, T., LITRICO, X. et A.M., B. (2008). Feed-forward river flow control using differential flatness. In *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control, Cancun, Mexico*.
- DING, Y., JIA, Y. et WANG, S. (2004). Identification of Manning’s roughness coefficients in shallow water flows. *Journal of Hydraulic Engineering*, 130:501–510.
- DOOGE, J., NAPIORKOWSKI, J. et STRUPCZEWSKI, W. (1987). Properties of the generalized downstream channel response. *Acta Geophysica Polonica*, 35(4):405–418.
- DURAND, Y., BRUN, E., MERINDOL, L., GUYOMARC’H, G., LESAFFRE, B. et MARTIN, E. (1993). A meteorological estimation of relevant parameters for snow models. *Annals of glaciology*, 18:65–71.
- ESTUPINA-BORRELL, V., DARTUS, D. et ABABOU, R. (2006). Flash flood modeling with the MARINE hydrological distributed model. *Hydrology and Earth System Sciences Discussions*, 3(6):3397–3438.
- EVENSEN, G. (1994). Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics. *Journal of Geophysical Research*, 99(C5).
- FAN, P. et LI, J. (2006). Diffusive wave solutions for open channel flows with uniform and concentrated lateral inflow. *Advances in Water Resources*, 29(7):1000–1019.
- FOSS, B. A., HAUG, J. E., ALNE, J. et AAM, S. (1989). User experience with on-line predictive river flow regulation. *IEEE Transactions on Power Systems*, 4(3):1089–1094.
- FREY, H. et PATIL, S. (2002). Identification and review of sensitivity analysis methods. *Risk Analysis*, 22(3):553–578.
- GARBRECHT, J. et MARTZ, L. (1997). The assignment of drainage direction over flat surfaces in raster digital elevation models. *Journal of Hydrology*, 193(1-4):204–213.
- GILLBERG, J. et LJUNG, L. (2009). Frequency-domain identification of continuous-time ARMA models from sampled data. *Automatica*, 45(6):1371–1378.
- HAVNØ, K., MADSEN, M. et DØRGE, J. (1995). *Computer models of watershed hydrology*. Water Resources Publications.
- HAYAMI, S. (1951). On the propagation of flood waves. Rapport technique, Disaster Prevention Institute, University of Kyoto.

- HENDERSON-SELLERS, A., YANG, Z.-L. et DICKINSON, R. (1993). The project for intercomparison of land surface parameterisation schemes. *Bulletin - American Meteorological Society*, 74(7):1335–1349.
- HORNBERGER, G. et SPEAR, R. (1981). An approach to the preliminary analysis of environmental systems. *Journal of Environmental Management*, 12(1):7–18.
- HURAND, P. et KOSUTH, P. (1993). Régulations en rivière. *La Houille Blanche*, 2:143–149.
- KALMAN, R. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, pages 35–45.
- KHAN, M. (1993). Muskingum flood routing model for multiple tributaries. *Water Resources Research*, 29(4):1057–1062.
- KLEMES, V. (1986). Operational testing of hydrological simulation models. *Hydrological Sciences Journal*, 31(1):13–24.
- KOSUTH, P. (1994). *Technique de régulation automatique des systèmes complexes : application aux systèmes hydrauliques à surface libre*. Thèse de doctorat, INSAT.
- LABBÉ, F., RUELLE, P., GARIN, P. et LEROY, P. (2000). Modelling irrigation scheduling to analyse water management at farm level, during water shortages. *European Journal of Agronomy*, 12(1):55 – 67.
- LAI, X. et MONNIER, J. (2009). Assimilation of spatially distributed water levels into a shallow-water flood model. Part I : Mathematical method and test case. *Journal of Hydrology*, 377(1-2):1 – 11.
- LAL, M. et MITRA, R. (1974). Comparison of transfer function simplification methods. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-19(5):617–618.
- LAMACQ, S. (1997). *Coordination entre l'offre et la demande en eau sur un périmètre irrigué. Des scénarios, des systèmes, et des hommes...* Thèse de doctorat, ENGREF - Cemagref.
- LANDAU, I. (1993). *Identification et commande des systèmes*. Hermès, 2e édition.
- LARMINAT, P. (1996). *Automatique : commande des systèmes linéaires*. Hermès, 2e édition.
- LE DIMET, F. X. et TALAGRAND, O. (1986). Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations : Theoretical aspects. *Tellus*, 38A:97–110.
- LE MOINE, N. (2008). *Le bassin versant de surface vu par le souterrain : une voie d'amélioration des performances et du réalisme des modèles pluie-débit ?* Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie.

- LEENHARDT, D., TROUVAT, J.-L., GONZALES, G., PERARNAUD, V., PRATS, S. et BERGEZ, J.-E. (2004a). Estimating irrigation demand for water management on a regional scale : I. ADEAUMIS, a simulation platform based on bio-decisional modelling and spatial information. *Agricultural water management*, 68(3):207–232.
- LEENHARDT, D., TROUVAT, J.-L., GONZALES, G., PERARNAUD, V., PRATS, S. et BERGEZ, J.-E. (2004b). Estimating irrigation demand for water management on a regional scale : II. Validation of ADEAUMIS. *Agricultural water management*, 68(3):233–250.
- LENCASTRE, A. (2005). *Hydraulique générale*. Eyrolles.
- LENHART, T., ECKHARDT, K., FOHRER, N. et FREDE, H.-G. (2002). Comparison of two different approaches of sensitivity analysis. *Physics and Chemistry of the Earth*, 27(9-10):645–654.
- LERAT, J. (2009). *Quels apports hydrologiques pour les modèles hydrauliques ? Vers un modèle intégré de simulation des crues*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie.
- LEVENBERG, K. (1944). A method for the solution of certain nonlinear problems in least squares. *Quarterly of Applied Mathematics*, 2:164–168.
- LIANG, X. et GUO, J. (2003). Intercomparison of land-surface parameterization schemes : Sensitivity of surface energy and water fluxes to model parameters. *Journal of Hydrology*, 279(1-4):182–209.
- LINSLEY, R. (1949). *Applied Hydrology*. McGraw-Hill, New York.
- LITRICO, X. (1999). *Modélisation, identification et commande robuste de systèmes hydrauliques à surface libre*. Ph.D. thesis, ENGREF - Cemagref. (in French).
- LITRICO, X. (2001a). Extended Kalman Filter for estimation of lateral discharges in a river reach. *Composition personnelle*.
- LITRICO, X. (2001b). Nonlinear diffusive wave modeling and identification for open-channels. *Journal of Hydraulic Engineering*, 127(4):313–320.
- LITRICO, X. et FROMION, V. (2004a). Analytical approximation of open-channel flow for controller design. *Applied Mathematical Modelling*, 28(7):677–695.
- LITRICO, X. et FROMION, V. (2004b). Simplified modeling of irrigation canals for controller design. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 130(5):373–383.
- LITRICO, X. et POMET, J.-B. (2003). Nonlinear modeling and control of a long river stretch. *European Control Conference*.
- LJUNG, L. (1999). *System Identification - Theory for the User*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J., 2e édition.

- LJUNG, L. (2004). State of the art in linear system identification : Time and frequency domain methods. *In Proceedings of the 2004 American Control Conference (AAC)*, volume 1, pages 650–660, Boston, MA.
- LUENBERGER, D. (1971). An introduction to observers. *In IEEE Trans. Aut. Control*, volume AC-16, pages 596–602.
- MADSEN, H. et CANIZARES, R. (1999). Comparison of extended and ensemble Kalman filters for data assimilation in coastal area modelling. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 31(6):961–981.
- MADSEN, H. et SKOTNER, C. (2005). Adaptive state updating in real-time river flow forecasting - A combined filtering and error forecasting procedure. *Journal of Hydrology*, 308(1-4):302–312.
- MAILHOL, J., OLUFAYO, A. et RUELLE, P. (1997). Sorghum and sunflower evapotranspiration and yield from simulated leaf area index. *Agricultural Water Management*, 35(1-2):167–182.
- MALATERRE, P. (1994). *Modélisation, analyse et commande optimale LQR d'un canal d'irrigation*. Thèse de doctorat, LAAS - CNRS - ENGREF - Cemagref.
- MARTZ, L. et GARBRECHT, J. (1998). The treatment of flat areas and depressions in automated drainage analysis of raster digital elevation models. *Hydrological Processes*, 12:843–855.
- MARZOUKI, T. Z. (1989). Le système hydraulique de la rivière Larcis (barrages, rivière, périmètres irrigués). Mémoire de D.E.A., ENGREF - Cemagref - CARA.
- MATHEVET, T. (2005). *Quels modèles pluie-débit globaux au pas de temps horaire ? Développements empiriques et comparaison de modèles sur un large échantillon de bassins*. Thèse de doctorat, ENGREF.
- MCCARTHY, G. (1938). The Unit Hydrograph and Flood Routing. Unpublished manuscript (cité par Chow, 1959). *A conference of the North Atlantic Division of the US Army Corps of Engineers*.
- MOKHTARI, A. et FREY, H. (2005). Sensitivity analysis of a two-dimensional probabilistic risk assessment model using analysis of variance. *Risk Analysis*, 25(6):1511–1529.
- MOLLE, F. et MARAUX, F. (2008). A-t-on assez d'eau pour nourrir la planète ? *Dossiers de Pour la science*, 1:99–102.
- MORADKHANI, H., SOROOSHIAN, S., GUPTA, H. et HOUSER, P. (2005). Dual state-parameter estimation of hydrological models using ensemble Kalman filter. *Advances in Water Resources*, 28(2):135–147.
- MORAMARCO, T., FAN, Y. et BRAS, R. (1999). Analytical solution for channel routing with uniform lateral inflow. *Journal of Hydraulic Engineering*, 125(7):707–712.

- MOUSSA, R. (1996). Analytical Hayami solution for the diffusive wave flood routing problem with lateral inflow. *Hydrological Processes*, 10(9):1209–1227.
- MOUSSA, R. (1997). Geomorphological transfer function calculated from digital elevation models for distributed hydrological modelling. *Hydrological Processes*, 11(5):429–449.
- MOUSSA, R. et BOCQUILLON, C. (1996). Criteria for the choice of flood-routing methods in natural channels. *Journal of Hydrology*, 186(1-4):1–30.
- MUNIER, S., BELAUD, G. et LITRICO, X. (2009). Closed-form expression of the response-time of an open-channel. *Soumis à Journal of Irrigation and Drainage Engineering*.
- MUNIER, S., LITRICO, X., BELAUD, G. et MALATERRE, P.-O. (2008). Distributed approximation of open-channel flow routing accounting for backwater effects. *Advances in Water Resources*, 31(12):1590–1602.
- MUNIER, S., WU, Q., AMIN, S., BAYEN, A., LITRICO, X. et BELAUD, G. (2007). Parameter identification for the shallow water equations using modal decomposition. In *46th IEEE Conference on Decision and Control, New Orleans, Louisiana USA*.
- MUNOZ SABATER, J., MASSART, S., RICCI, S. et B., B. (2008). Introduction à l'assimilation de données ; applications actuelles dans les projets du CERFACS. Rapport technique, CERFACS.
- NASH, J. et SUTCLIFFE, J. (1970). River flow forecasting through conceptual models part I - A discussion of principles. *Journal of Hydrology*, 10(3):282–290.
- NAU, F., PAYEN, D., OLLIVIER, J. et ROUX, A. (2005). Bilan du plan de gestion des étiages de l'Adour et du plan de crise interdépartemental. Rapport technique, Ministère de l'Ecologie et du Développement Durable.
- NEAL, J., ATKINSON, P. et HUTTON, C. (2009). Evaluating the utility of the ensemble transform Kalman filter for adaptive sampling when updating a hydrodynamic model. *Journal of Hydrology*, 375(3-4):589–600.
- NETER, J., KUTNER, M., NACHTSHEIM, C. et WASSERMAN, W. (1996). Applied linear statistical models (fourth edition). *IMA Journal of Mathematics Applied in Medicine and Biology*, 3:229–263.
- O'DONNELL, T. (1985). A direct three-parameter Muskingum procedure incorporating lateral inflow. *Hydrological Sciences Journal/Journal des Sciences Hydrologiques*, 30(4):479–496.
- OUDIN, L. (2004). *Recherche d'un modèle d'évapotranspiration potentielle comme entrée d'un modèle pluie-débit global*. Thèse de doctorat, ENGREF, Paris.
- OUDIN, L., HERVIEU, F., MICHEL, C., PERRIN, C., ANDRÉASSIAN, V., ANCTIL, F. et LOUMAGNE, C. (2005). Which potential evapotranspiration input for a lumped rainfall-runoff model? Part 2 - Towards a simple and efficient potential evapotranspiration model for rainfall-runoff modelling. *Journal of Hydrology*, 303(1-4):290–306.

- PAPPENBERGER, F., BEVEN, K. J., RATTO, M. et MATGEN, P. (2008). Multi-method global sensitivity analysis of flood inundation models. *Advances in Water Resources*, 31(1):1–14.
- PERRIN, C. (2000). *Vers une amélioration d'un modèle global pluie-débit au travers d'une approche comparative*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- PIQUEREAU, A. et VILLOCEL, A. (1982). Gestion automatique des eaux d'étiage. Cas de la rivière Arrats. Rapport technique, ONERA, CERT/DERA Toulouse, ADI, CACG.
- QUINTANA-SEGUÍ, P., LE MOIGNE, P., DURAND, Y., MARTIN, E., HABETS, F., BAILLON, M., CANELLAS, C., FRANCHISTEGUY, L. et MOREL, S. (2008). Analysis of near-surface atmospheric variables : Validation of the SAFRAN analysis over France. *Journal of Applied Meteorology and Climatology*, 47(1):92–107.
- RABBANI, T., DI MEGLIO, F., LITRICO, X. et BAYEN, A. (2009). Feed-forward control of open channel flow using differential flatness. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*.
- REFSGAARD, J. (1997). Validation and intercomparison of different updating procedures for real-time forecasting. *Nordic Hydrology*, 28(2):65–84.
- REFSGAARD, J., ROSBJERG, D. et MARKUSSEN, L. (1983). Application of Kalman filter to real-time operation and to uncertainty analyses in hydrological modelling. *IAHS Publication No 147*, pages 273–282.
- RENNER, M., WERNER, M., RADEMACHER, S. et SPROKKEREEF, E. (2009). Verification of ensemble flow forecasts for the River Rhine. *Journal of Hydrology*, 376(3-4):463 – 475.
- REY, J. (1990). Contribution à la modélisation et la régulation des transferts d'eau sur des systèmes de type rivière/baches intermédiaires. Mémoire de D.E.A., Université Montpellier 2.
- ROMANOWICZ, R., YOUNG, P. et BEVEN, K. (2006). Data assimilation and adaptive forecasting of water levels in the river Severn catchment, United Kingdom. *Water Resources Research*, 42(6).
- ROUX, A. (1992). Gestion des étiages de rivière par les méthodes de l'automatique. Application à la rivière Dropt. Mémoire de D.E.A., ENITRTS - Cemagref.
- ROUX, H. et DARTUS, D. (2005). Parameter identification using optimization techniques in open-channel inverse problems. *Journal of Hydraulic Research*, 43(3):311–320.
- ROUX, H. et DARTUS, D. (2006). Use of parameter optimization to estimate a flood wave : Potential applications to remote sensing of rivers. *Journal of Hydrology*, 328(1-2):258 – 266.
- ROUX, H., RACLOT, D. et DARTUS, D. (2003). Methods of assimilation of the observational data of the earth applied to the reconstitution of hydraulic parameters. *Bulletin - Société française de photogrammétrie et télédétection*, 172:40–49.

- SAINT-VENANT (1871). Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit. *Compte rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 73:147–154, 237–240.
- SALTELLI, A., TARANTOLA, S. et CAMPOLONGO, F. (2000). Sensitivity Analysis as an Ingredient of Modeling. *Statistical Science*, 15(4):377–395.
- SAWADAGO, S. (1992). *Modélisation, commande prédictive et supervision d'un système d'irrigation*. Thèse de doctorat, LAAS-CNRS Toulouse.
- SCHUURMANS, J., HOF, A., DIJKSTRA, S., BOSGRA, O. et BROUWER, R. (1999). Simple water level controller for irrigation and drainage canals. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 125(4):189–195.
- SCHWEPPE, F. (1965). Evaluation of likelihood functions for Gaussian signals. *IEEE Transactions on Information Theory*, 11(1):61–70.
- SHAW, E. (1994). *Hydrology in Practice*. London : Chapman & Hall, 3e édition.
- SINGH, V. (1995). *Computer Models of Watershed Hydrology*. Highlands Ranch, CO : Water Resources Publications.
- SMITH, M. (1992). Cropwat a computer program for irrigation planning and management. *FAO Irrigation and Drainage Paper 26*.
- SOBOL', I. (1993). Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models. *Mathematical models and computer experiment*, 1:407–417.
- STRELKOFF, T. S., DELTOUR, J. L., BURT, C. M., CLEMMENS, A. J. et BAUME, J. P. (1998). Influence of Canal Geometry and Dynamics on Controllability. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 124(1):16–22.
- STRUB, I., PERCELAY, J., TOSSAVAINEN, O.-P. et BAYEN, A. M. (2009). Comparison of two data assimilation algorithms for shallow water flows. *Networks and heterogeneous media*, 4(2):409–430.
- TANG, Y., REED, P., WAGENER, T. et VAN WERKHOVEN, K. (2007). Comparing sensitivity analysis methods to advance lumped watershed model identification and evaluation. *Hydrology and Earth System Sciences*, 11(2):793–817.
- TANGARA, M. (2005). *Nouvelle méthode de prévision de crue utilisant un modèle pluie-débit global*. Thèse de doctorat, EPHE, Paris.
- TODINI, E. (2007). Hydrological catchment modelling : Past, present and future. *Hydrology and Earth System Sciences*, 11(1):468–482.

- van GRIENSVEN, A., MEIXNER, T., GRUNWALD, S., BISHOP, T., DILUZIO, M. et SRINIVASAN, R. (2006). A global sensitivity analysis tool for the parameters of multi-variable catchment models. *Journal of Hydrology*, 324(1-4):10–23.
- van WERKHOVEN, K., WAGENER, T., REED, P. et TANG, Y. (2007). Sensitivity-guided reduction of parametric dimensionality for multi-objective calibration of watershed models. *Advances in Water Resources*.
- WHEATER, H., JAKEMAN, A. et BEVEN, K. (1993). *Modeling changes in environmental systems*, chapitre Progress and directions in rainfall-runoff modelling. Chichester : John Wiley & Sons.
- YOUNG, P. (1974). Recursive approaches to time series analysis. *Bull. Inst. Math. Appl.*, 10:209–224.
- YOUNG, P. (1986). Time-series methods and recursive estimation in hydrological systems analysis. *River Flow Modelling and Forecasting*, pages 129–180.
- YOUNG, P. (2002). Advances in real-time flood forecasting. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A - Mathematical Physical and Engineering Sciences*, 360(1796):1433–1450.
- YOUNG, P. et PEDREGAL, D. (1999). Recursive and en-bloc approaches to signal extraction. *Journal of Applied Statistics*, 26(1):103–128.
- YOUNG, P. C. (1978). *A general theory of modelling for badly defined dynamic systems*. Modeling, Identification and Control in Environmental Systems.

Annexe 1 : Distributed approximation of open-channel flow routing accounting for backwater effects

Simon Munier, Xavier Litrico, Gilles Belaud et Pierre-Olivier Malaterre

Article publié dans *Advances in Water Resources*, 2008, 31, 1590-1602

Distributed approximation of open-channel flow routing accounting for backwater effects

Simon Munier^a Xavier Litrico^a Gilles Belaud^b
Pierre-Olivier Malaterre^a

^a*Cemagref, UMR G-EAU, 361 rue J.F. Breton, B.P. 5095, 34196 Montpellier
Cedex 5, France*

^b*IRD, UMR G-EAU, Maison des Sciences de l'Eau, 300 Avenue Emile Jeanbrau,
34095 Montpellier Cedex 5, France*

Abstract

In this article, we propose a new model, called LBLR for Linear Backwater Lag-and-Route, which approximates the Saint-Venant equations linearized around a non-uniform flow in a finite channel (with a downstream boundary condition). A classical frequency approach is used to build the distributed Saint-Venant transfer function providing the discharge at any point in the channel in the Laplace domain with respect to the upstream discharge. The moment matching method is used to match a second-order-with-delay model on the theoretical distributed Saint-Venant transfer function. Model parameters are then expressed analytically as functions of the pool characteristics. The proposed model efficiently accounts for the effects of downstream boundary condition on the channel dynamics.

Key words: Open-channel flow routing, Saint-Venant equations, frequency response, Laplace transform

1 Introduction

Water resources are renewable but in limited supply. In a context of multiple needs, such as irrigation or domestic water supply, this resource has to

Email addresses: `simon.munier@cemagref.fr` (Simon Munier),
`xavier.litrico@cemagref.fr` (Xavier Litrico), `belaud@msem.univ-montp2.fr`
(Gilles Belaud), `pierre-olivier.malaterre@cemagref.fr` (Pierre-Olivier
Malaterre).

be collected, shared and then distributed using water transport systems, such as rivers and/or canals. Water managers control flows in such open-channels using hydraulic structures (dams, weirs, gates). The water distribution efficiency can be greatly improved by operating these structures using automatic tools. This requires models that are able to represent open-channel flow routing with a desired accuracy. Nowadays, many systems are controlled using linear controllers based on linear models since many methodologies and tools are well-known and validated for such systems. Linear approaches have also advantages in terms of simplicity, rapidity and robustness ([11,13,17]). Several authors used numerical schemes to obtain such linear models from the Saint-Venant equations ([1,10,21]). But they are usually high order models. Alternative approaches could be preferred to obtain lower order models with coefficients expressed analytically. This justifies the interest in improving such flow routing models.

Modeling of flow routing along a river stretch or a canal pool has been the subject of numerous articles since the 1950's. A comprehensive review of approximate flow routing methods has been presented in [28]. Different linear models have been developed for flow routing simulation purposes (e.g. [8,26]). Most of them are based on analysis of the linearized Saint-Venant equations around a reference flow. To greatly simplify the equations, the downstream boundary condition is usually neglected by considering a semi-infinite channel (see e.g. [8]), leading to a uniform reference flow. However, a downstream boundary condition imposed by a hydraulic structure, such as a weir, has two different effects on the flow: it modifies the water depth, causing a backwater curve, and it enforces a local coupling, called feedback, between the discharge and water depth. But, even in a linear framework (i.e. for small variations), neglecting these two effects sometimes leads to large under- or over-estimation of some parameters such as the response time, peak time or the level of attenuation. The effects induced on the flow dynamics by the downstream boundary condition have been analyzed based on numerical simulations in [25]. Some analysis of the backwater effects has also been brought in [7] and [27], and has underlined the fact that the downstream boundary condition can sometimes provide significant modifications of the flow dynamics.

In this article, a new three-parameter model, called LBLR for Linear Backwater Lag and Route, is derived and accounts for the effects of the downstream boundary condition. It takes the feedback and the backwater effects into account separately, and provides the discharge at any point in the channel with respect to the discharge at the upstream end. The three parameters are expressed analytically depending on the pool characteristics (length, geometry, roughness, reference flow), which provides a quick and accurate calculation of these parameters.

Our approach is based on the frequency domain representation of linearized

Saint-Venant equations, which generates transfer functions in the Laplace domain. In this framework, the introduction of a downstream boundary condition is equivalent to a local feedback between the discharge and the water level deviations. A moment matching method is then used to compute the parameters of a first- or a second-order-with-delay model that approximates the system in low frequencies. The obtained model is first computed in the uniform case, then extended to the non-uniform flow. In the last section, the model is validated on a sample canal under different downstream boundary conditions.

2 Methodology based on a frequency approach

2.1 General methodology

We consider the full one-dimensional Saint-Venant equations for a prismatic channel of length X linearized around a reference steady state regime, possibly non-uniform (see Fig. 1).

These equations are rewritten in the Laplace domain, which leads to the Saint-Venant transfer matrix linking the discharge and the water depth at any point in the channel to the two boundary conditions: downstream and upstream discharges.

Since the downstream boundary condition introduces a local coupling between the downstream discharge and the downstream water depth (feedback), this relation can be combined with the Saint-Venant transfer matrix, reducing the number of boundary conditions to only one: the upstream discharge. This feedback relation is linearized, prior to its Laplace transformation. Coupling the obtained relation with the Saint-Venant transfer matrix leads to the desired transfer function, linking, in the Laplace domain, the upstream discharge to the discharge at any point in the channel.

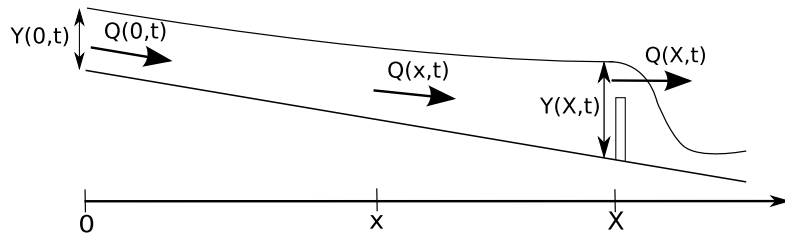


Fig. 1. General scheme of the considered channel.

2.2 Linearized Saint-Venant equations

We consider a stationary regime and small variations around it. The discharge of the reference flow Q is assumed to be constant along the channel, whereas the water depth can vary. The following notations are used: x (m) is the abscissa along the channel, S_b the bed slope and g the gravitational acceleration (ms^{-2}). The following variables represent the reference flow: $A(x)$ the wetted area (m^2), $P(x)$ the wetted perimeter (m), Q the discharge (m^3/s) through section $A(x)$, $Y(x)$ the water depth (m), $S_f(x)$ the friction slope, $V(x) = Q/A(x)$ the mean flow velocity (ms^{-1}) and $T(x)$ the top width (m), $F(x) = V(x)/\mathcal{C}(x)$ the Froude number with $\mathcal{C}(x) = \sqrt{gA(x)/T(x)}$ the wave celerity (ms^{-1}). Throughout the article, the flow is assumed to be subcritical (i.e., $F(x) < 1$).

The friction slope S_f is modeled using the Manning formula (see [6]):

$$S_f(x) = \frac{Q^2 n^2}{A(x)^2 R(x)^{4/3}} \quad (1)$$

with n the Manning coefficient ($\text{sm}^{-1/3}$) and $R(x)$ the hydraulic radius (m), defined by $R(x) = A(x)/P(x)$.

Let us denote $q(x, t)$ and $y(x, t)$ the variations in discharge and water depth at abscissa x and time t , compared to the reference steady regime.

The linearized Saint-Venant equations are given by (see [14] for details):

$$T \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + 2V \frac{\partial q}{\partial x} - \mu q + (\mathcal{C}^2 - V^2) T \frac{\partial y}{\partial x} - \nu y = 0 \quad (3)$$

where the dependency on x and t is omitted for clarity purposes.

In the general non-uniform case, parameters μ and ν , which are functions of x , are defined by the following equations:

$$\nu = V^2 \frac{dT}{dx} + gT \left[(1 + \kappa) S_b - (1 + \kappa - (\kappa - 2) F^2) \frac{dY}{dx} \right] \quad (4)$$

$$\mu = -\frac{2g}{V} \left(S_b - \frac{dY}{dx} \right) \quad (5)$$

with $\kappa = 7/3 - 4A/(3TP)(\partial P/\partial Y)$.

The two boundary conditions are the upstream discharge denoted $q_0(t) = q(0, t)$ and the downstream discharge denoted $q_X(t) = q(X, t)$.

2.3 Frequency approach

The purpose of the article is to establish a transfer function $TF(x, s)$ linking the upstream discharge to the discharge at any point in the channel.

$$q_x(s) = TF(x, s)q_0(s) \quad (6)$$

For this, the Laplace transform is applied to the Saint-Venant equations, leading to an ordinary differential equation in the space variable x and parameterized by the Laplace variable s . The integration of this equation leads to a transfer matrix $\Gamma(x, s)$, called the transition matrix, and gives the discharge $q(x, s)$ and the water depth $y(x, s)$ at any location with respect to the upstream discharge $q_0(s)$ and water depth $y_0(s)$. This matrix is then coupled with a feedback relation introduced with the downstream boundary condition, which leads to an analytical expression of the transfer function $TF(x, s)$.

2.4 Laplace transform

The Laplace transform \mathcal{L} of a function $f(t)$ is defined as follows:

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (7)$$

where s is the Laplace variable.

The following property is used to derive the Saint-Venant equations in the Laplace domain:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0^-) \quad (8)$$

The boundary 0^- is chosen to prevent troubles at the origin, especially when the function f is discontinuous (see [19]).

Taking some liberty with notation, we denote $f(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$. The possible ambiguity with $f(t)$ will be clarified contextually.

2.5 Saint-Venant transfer matrix

Applying Laplace transform to the linear partial differential Eqs. (2) and (3) results in a system of Ordinary Differential Equations (ODE) in the variable x , parameterized by the Laplace variable s .

The integration of this ODE leads to the transition matrix $\Gamma(x, s)$ linking the discharge q and the water depth y at any point x in the canal pool to the upstream discharge and water depth, q_0 and y_0 respectively (see appendix A for details):

$$\begin{pmatrix} q(x, s) \\ y(x, s) \end{pmatrix} = \Gamma(x, s) \begin{pmatrix} q_0(s) \\ y_0(s) \end{pmatrix} \quad (9)$$

with

$$\Gamma(x, s) = \begin{pmatrix} \gamma_{11}(x, s) & \gamma_{12}(x, s) \\ \gamma_{21}(x, s) & \gamma_{22}(x, s) \end{pmatrix} \quad (10)$$

2.6 Coupling with a downstream local feedback

We now consider an open-channel with a given downstream boundary condition expressed as a local coupling between the discharge and the water elevation. This condition can either be due to a hydraulic structure, or to the effect of a semi-infinite channel.

Linearizing the relation between the discharge and the water depth leads to the following equation, expressed in the Laplace domain:

$$q_X(s) = k y_X(s) \quad (11)$$

where $k = (dQ/dY)_X$ represents the local feedback.

For example, a rectangular weir is usually described by the following free flow equation:

$$Q(X, t) = C_{d_w} \sqrt{2g} L_w (Y(X, t) - Z_w)^{3/2} \quad (12)$$

where C_{d_w} is the discharge coefficient, L_w the weir width, Z_w the sill height and g the gravitational acceleration. If C_{d_w} remains constant, the feedback parameter k is given here by $k = \frac{3}{2} \frac{Q}{Y(X) - Z_w}$.

One may note that the feedback coefficient k can take any positive value, from 0 for a wall ($q_X(t) = 0$) to almost ∞ for a large reservoir ($y_X(t) = 0$).

In particular, it is possible to simulate a semi-infinite channel by choosing a coefficient k that approximates the non-reflective boundary condition (see [16] for details).

When assuming a uniform flow at the downstream end of the reach, the water depth at the reference flow is the normal depth Y_n , and the feedback coefficient k_n is defined using the Manning formula.

2.7 Saint-Venant Transfer Function

The Saint-Venant transfer function $TF(x, s)$ at the relative distance x is given by Eq. (6).

The downstream boundary adds a closed-form relation in the Laplace domain between the discharge $q_X(s)$ and the water depth $y_X(s)$ at the downstream end of the channel (Eq. (11)). This relation is coupled with Eq. (9) expressed at $x = X$, which leads to the following equation:

$$q_0(s) = k_0(X, s)y_0(s) \quad (13)$$

with

$$k_0(X, s) = -\frac{\gamma_{12}(X, s) - k\gamma_{22}(X, s)}{\gamma_{11}(X, s) - k\gamma_{21}(X, s)} \quad (14)$$

Finally Eqs. (9) and (13) lead to the Saint-Venant transfer function at any point x :

$$TF(x, s) = \gamma_{11}(x, s) + \frac{\gamma_{12}(x, s)}{k_0(X, s)} \quad (15)$$

Eq. (15) provides a linear distributed model for flow transfer in an open-channel with a given downstream boundary condition. This model is expressed analytically in the frequency domain using a transcendental transfer function which depends on the pool characteristics. The next section presents the method used to accurately approximate this transfer function.

3 Approximate model of flow routing with downstream local feedback for uniform flow

In the uniform case, [14] showed that it is possible to get a closed-form expression of the transition matrix $\Gamma(x, s)$ (see appendix A). Hence for a uniform flow, the transfer function $TF(x, s)$ is given by a closed-form expression and the moment matching method can be applied.

3.1 Moment matching method

The expression of the Saint-Venant transfer function is generally too complex to be easily inverted back to the time domain explicitly, so an approximation is required to get the response in the time domain. In the following, we use the classical moment matching method (see [9,23]) to derive an approximate second-order-with-delay model for flow routing.

The R -th cumulant (i.e., logarithmic moment) of a transfer function h is given by:

$$M_R[h(x, t)] = (-1)^R \frac{d^R}{ds^R} [\log h(x, s)]_{s=0} \quad (16)$$

The purpose of the moment matching method is to match the cumulants of the exact transfer function to those of the approximate one. Equating the first n cumulants of the exact transfer function and the approximate one ensures a good representation for the low frequency range.

$M_0(x)$, $M_1(x)$, $M_2(x)$ and $M_4(x)$ denote the first four cumulants of the transfer function $TF(x, s)$ given by Eq. (15). The Taylor series expansion at $s = 0$ is used for the computation of $M_i(x)$, $i = 0 \dots 3$:

$$TF(x, s) = A(x) + B(x)s + C(x)s^2 + D(x)s^3 + o(s^3) \quad (17)$$

To obtain explicit expressions of $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$, a third order Taylor expansion at $s = 0$ of each term of the transfer function $TF(x, s)$ is performed. Details of the computation are given in appendix B.

The relations between the cumulants and the Taylor coefficients are:

$$\begin{cases} M_0(x) = \log A(x) \\ M_1(x) = -\frac{B(x)}{A(x)} \\ M_2(x) = 2 \left(\frac{C(x)}{A(x)} - \frac{B^2(x)}{2A^2(x)} \right) \\ M_3(x) = -6 \left(\frac{D(x)}{A(x)} - \frac{B(x)C(x)}{A^2(x)} + \frac{B^3(x)}{3A^3(x)} \right) \end{cases} \quad (18)$$

It is widely accepted that the flow routing in a channel is a delayed process, and that there is some attenuation of the peak flow. Such phenomenon can be accurately described by a rational transfer function with delay. To enable analytical computations, we restrict ourselves to a second-order-with-delay

model, as it is commonly performed in the literature ([20,23]). We show in the following that by using the moment matching method, one may identify the parameters of a second-order-with-delay that matches the low order moments of the full Saint-Venant transfer function. In some cases, as for instance for short rivers where no stable second-order is available, a first-order-with-delay model is identified.

3.2 Second-order-with-delay

The transfer function $TF(x, s)$ is approximated by a second-order-with-delay:

$$TF(x, s) \approx \frac{g(x)e^{-\tau(x)s}}{(1 + K_1(x)s)(1 + K_2(x)s)} \quad (19)$$

where $g(x)$, $K_1(x)$, $K_2(x)$ and $\tau(x)$ are the model parameters.

Equating the first four cumulants of the transfer function $TF(x)$ and its approximation (19) leads to:

$$\begin{cases} M_0(x) = \log g(x) \\ M_1(x) = \tau(x) + K_1(x) + K_2(x) \\ M_2(x) = K_1^2(x) + K_2^2(x) \\ M_3(x) = 2K_1^3(x) + 2K_2^3(x) \end{cases} \quad (20)$$

The resulting model is a second-order-with-delay (the resolution of the system provided by Eq. (20) is given in appendix D.1). It is stable only if $K_1(x)$ and $K_2(x)$ are positive, which is equivalent to $C_S > 1$, where $C_S = \frac{8C^3}{9D^2}$. This expression of C_S is in agreement with the one defined in [20] and corresponding to the Saint-Venant equations without the inertia terms (diffusive wave equation).

In the case where $C_S \leq 1$, the transfer function cannot be approximated by a stable second-order-with-delay, so the second order is replaced by a first order that is stable albeit less accurate.

3.3 First-order-with-delay

To approximate the transfer function by a first-order-with-delay,

$$TF(x, s) \approx \frac{g(x)e^{-\tau(x)s}}{1 + K_1(x)s} \quad (21)$$

the time constant $K_2(x)$ becomes null and one has to solve the system which considers only the first three cumulants.

The solution is then given by (see appendix D.2):

$$\begin{cases} \tau(x) = M_1(x) - \sqrt{M_2(x)} \\ K_1(x) = \sqrt{M_2(x)} \\ g(x) = 1 \end{cases} \quad (22)$$

where $M_1(x)$ and $M_2(x)$ can be obtained as closed-form expression using the third order Taylor series of the transfer function given by Eq. (15).

One may note that other approximate models can be calibrated with the present method, since it simply requires the solving of the system obtained by equating the first cumulants of the transfer function and its approximation. In particular, adding a zero in the transfer function may lead to a better approximation for short canals (see [15]).

In any case, this method leads to an analytical and distributed expression of the model parameters (τ , K_1 for a first-order-with-delay or τ , K_1 , K_2 for a second-order-with-delay). These expressions provide a low frequency approximation of the flow transfer. Parameters are obtained analytically as functions of the feedback coefficient k and the physical parameters of the pool (geometry, friction, discharge).

3.4 Step response in the time domain

Since the approximate model is a first- or a second-order-with-delay, it becomes easier to obtain the response in the time domain. Especially if the input is a step ($q_0(t) = \mathcal{H}(t)$, where \mathcal{H} is the Heaviside function), it is possible to obtain an analytical expression of the output.

Indeed the ordinary differential equation (ODE) corresponding to the second-order-with-delay transfer function (Eq. (19)) is:

$$K_1(x)K_2(x)\frac{d^2q}{dt^2}(x,t) + (K_1(x) + K_2(x))\frac{dq}{dt}(x,t) + q(x,t) = g(x)q_0(t - \tau(x)) \quad (23)$$

For a step input and for the following initial conditions:

$$q(x, 0) = 0 \quad (24)$$

$$\frac{dq}{dt}(x, 0) = 0 \quad (25)$$

the solution is given analytically by:

$$q(x, t) = g(x) \left[\frac{K_1(x)}{K_1(x) - K_2(x)} \left(1 - e^{-\frac{t-\tau(x)}{K_1(x)}} \right) - \frac{K_2(x)}{K_1(x) - K_2(x)} \left(1 - e^{-\frac{t-\tau(x)}{K_2(x)}} \right) \right] \mathcal{H}(t - \tau(x)) \quad (26)$$

If the transfer function is a first-order-with-delay (Eq. (21)), the equivalent ODE is (23) with $K_2(x) = 0$. The initial condition is given by Eq. (24) and the solution is:

$$q(x, t) = g(x) \left(1 - e^{-\frac{t-\tau(x)}{K_1(x)}} \right) \mathcal{H}(t - \tau(x)) \quad (27)$$

In real cases, the input $q_0(t)$ differs from the Heaviside function. But, since the transfer function order remains low, some numerical algorithms can provide quick and accurate solvers for the ODE (23).

4 Approximate model of flow routing with downstream local feedback and backwater effects

4.1 The backwater approximation

We now consider the discharge and the water depth variations around a non-uniform steady flow. The equilibrium regime is described by $Q(x) = Q$ and $Y(x)$, solution of the following ordinary differential equation for a boundary condition defined by downstream elevation $Y(X)$:

$$\frac{dY}{dx} = \frac{S_b - S_f}{1 - F^2} \quad (28)$$

where S_f and F can be expressed as functions of Y .

Based on an idea initially proposed in [24], and modified in [15], we approximate a channel with a backwater curve by the concatenation of two pools. This consists in approximating the backwater curve by a stepwise linear function: a line parallel to the bed in the upstream part (corresponding to the uniform part) and a line tangent to the free surface at the downstream end in the downstream part. Let x_1 denote the abscissa of the intersection of the two lines (the discharge and the water depth variations at this point are denoted q_1

and y_1 respectively). The corresponding approximation of the backwater profile is schematized in Fig. 2. S_X represents the slope of the backwater curve at the downstream end of the reach and is computed using Eq. (28).

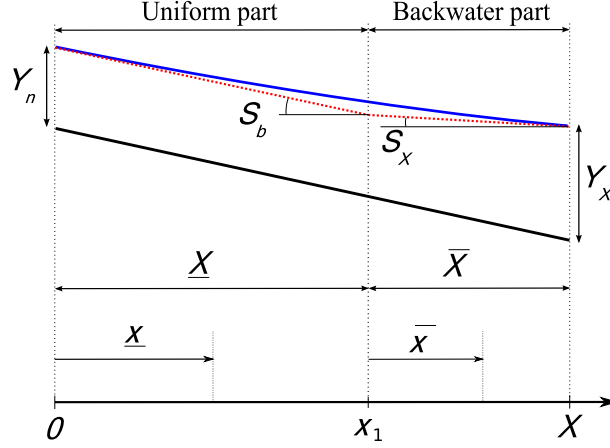


Fig. 2. Backwater curve approximation scheme.

4.2 Transfer function for a non uniform flow

After having divided the pool into two parts, the transfer matrix (9) can be established for each sub-pool. $\underline{\Gamma}(\underline{x}, s)$ corresponds to the uniform part (length $\underline{X} = x_1$, relative position $\underline{x} = x$), and $\bar{\Gamma}(\bar{x}, s)$ corresponds to the backwater part (length $\bar{X} = X - x_1$, relative position $\bar{x} = x - x_1$).

In the uniform part ($0 \leq x \leq x_1$), we have:

$$\begin{pmatrix} q(x, s) \\ y(x, s) \end{pmatrix} = \underline{\Gamma}(\underline{x}, s) \begin{pmatrix} q_0(s) \\ y_0(s) \end{pmatrix} \quad (29)$$

and in the backwater part ($x_1 \leq x \leq X$):

$$\begin{pmatrix} q(x, s) \\ y(x, s) \end{pmatrix} = \bar{\Gamma}(\bar{x}, s) \begin{pmatrix} q_1(s) \\ y_1(s) \end{pmatrix} \quad (30)$$

So it is possible to define an equivalent transfer matrix $\hat{\Gamma}(x, s)$ at any relative distance $0 \leq x \leq X$:

$$\begin{pmatrix} q(x, s) \\ y(x, s) \end{pmatrix} = \hat{\Gamma}(x, s) \begin{pmatrix} q_0(s) \\ y_0(s) \end{pmatrix} \quad (31)$$

with

$$\hat{\Gamma}(x, s) = \begin{cases} \underline{\Gamma}(\underline{x}, s) & \text{if } 0 \leq x \leq x_1 \\ \bar{\Gamma}(\bar{x}, s)\underline{\Gamma}(\underline{X}, s) & \text{if } x_1 \leq x \leq X \end{cases} \quad (32)$$

As in section 2.7, coupling the feedback relation (Eq. (11)) and Eq. (31) leads to:

$$TF(x, s) = \hat{\gamma}_{11}(x, s) + \frac{\hat{\gamma}_{12}(x, s)}{\hat{k}_0(X, s)} \quad (33)$$

with

$$\hat{k}_0(X, s) = -\frac{\hat{\gamma}_{12}(X, s) - k\hat{\gamma}_{22}(X, s)}{\hat{\gamma}_{11}(X, s) - k\hat{\gamma}_{21}(X, s)} \quad (34)$$

Eq. (33) gives to a closed-form expression of the transfer function $TF(x, s)$ at any relative distance x ($0 \leq x \leq X$), depending on the pool characteristics. It provides a linear distributed model for flow transfer in an open-channel with a given downstream boundary condition and a non-uniform flow.

4.3 Approximate model

The method used to approximate the transfer function for non-uniform flow is the same method as in section 3. As we know the exact linear transfer function obtained in the previous section, we compute the first cumulants (see appendix C) and apply the moment matching method.

5 Validation

5.1 Simulations

For validation purposes, we consider a trapezoidal prismatic channel, with characteristics detailed in table 1, where X is the channel length (m), m the bank slope (m/m), B the bed width (m), S_b the bed slope (m/m), n the Manning roughness coefficient ($\text{sm}^{-1/3}$), Q the reference discharge (m^3s^{-1}), Y_n the normal depth (m) and k_n the feedback coefficient (m^2s^{-1}) corresponding to the reference discharge Q .

Table 1

Parameters of the example canal

X	m	B	S_b	n	Q	Y_n	k_n
10000	1	50	0.0002	0.02	100	1.87	88.8

In order to validate our model and analyze the effects of the downstream boundary condition, different situations have been simulated with three different models. For each situation the Bode diagram and the response to a step are plotted for two relative positions: in the middle of the channel ($X/2$) and at the downstream end (X).

The Bode diagram is a representation of the transfer function in the frequency domain, used to analyze the behavior of the system in low and high frequencies. It represents the magnitude A_{dB} (in decibel) and the phase ϕ (in degree) of the transfer function at $s = i\omega$ (where $i^2 = -1$).

$$\begin{cases} A_{dB}(x, \omega) = 20 \log |TF(x, i\omega)| \\ \phi(x, \omega) = \arg (TF(x, i\omega)) \end{cases} \quad (35)$$

The step response is the response of the transfer function to a step input defined as follows:

$$q_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ 1 & \text{if } t \geq 0 \end{cases} \quad (36)$$

The first model is the linearized Saint-Venant model which is used as a reference for linear flow transfer. Its Bode diagram is obtained using the transfer function established in section 4.2, and the response in the time domain is simulated by SIC ([2]), a software that discretizes the Saint-Venant equations using a Preissmann scheme. The second model is the LBLR, our second-order-with-delay model (or first-order-with-delay if there is no stable second order solution), which considers a finite channel with a downstream boundary condition. The third one is a model assuming a semi-infinite channel by neglecting the upward waves, so that the flow is uniform and downstream structures have no effect upstream. This model, developed in [9], is based on the transfer function $TF(x) = e^{\lambda_1 x}$ (see appendix A for the definition of λ_1), approximated by a second-order-with-delay using the moment matching method described in section 3.1.

The validation takes place in three steps corresponding to three different downstream boundary conditions. Firstly, we consider a large reservoir or a large lake, in which the downstream water depth remains constant, which means that $k \rightarrow \infty$ (Eq. 11). The value $Y_X = 1.5Y_n = 2.81$ m has been chosen for this simulation.

Secondly, a gate is introduced at the downstream end of the reach in order to analyze the effects of a cross structure. This gate is described by Eq. (37). The characteristics of the gate are listed in table 2, where L_g is the width of the gate (m), W_g is the gate opening (m) and C_{d_g} is the discharge coefficient.

The downstream boundary condition becomes: $Y_X = 1.12Y_n$ and $k = 0.27k_n$.

$$Q(X, t) = C_{d_g} L_g W_g \sqrt{2gY(X, t)} \quad (37)$$

Table 2

Characteristics of the downstream gate

L_g	W_g	C_{d_g}
40	0.65	0.6

Lastly, the gate is replaced by a weir described by Eq. (12). Its characteristics are listed in table 3, where L_w is the width of the weir (m), Z_w is the sill height (m) and C_{d_w} is the discharge coefficient. For this case, the downstream boundary condition is: $Y_X = 1.74Y_n$ and $k = 1.34k_n$.

Table 3

Characteristics of the downstream weir

L_w	Z_w	C_{d_w}
40	2	0.4

5.2 Reservoir at the downstream end

The first simulation considers a large reservoir as the downstream boundary condition, defined by $Y_X = 1.5Y_n$ and $k \rightarrow \infty$. Fig. 3 represents the backwater curve and its approximation for this case, showing the non-uniformity of the flow. Figs. 4 and 5 show the Bode diagram and the step response of the three models.

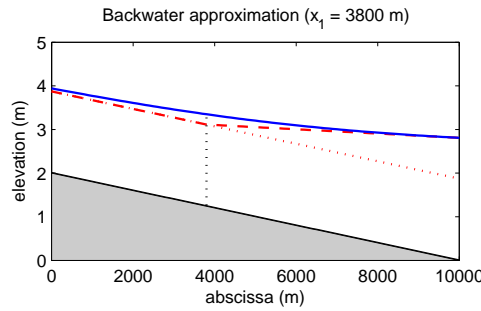


Fig. 3. Backwater curve and its approximation with a reservoir at the downstream end. Real backwater curve (—), uniform normal depth Y_n (\cdots) and approximate backwater curve ($- -$). x_1 is also represented.

The semi-infinite model represents a uniform flow without feedback, and is insensitive to the downstream boundary condition. The Bode diagrams in Fig. 4 show that the complete Saint-Venant model significantly differs from the semi-infinite model when considering a non-uniform flow with infinite feedback. The

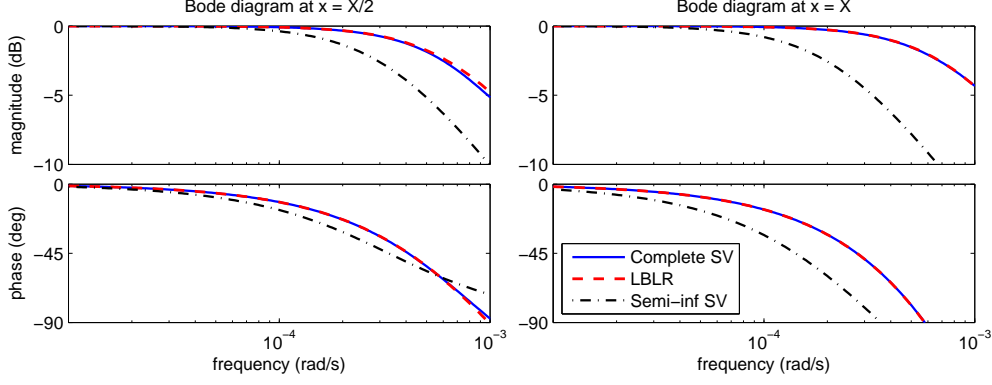


Fig. 4. Bode diagram at $X/2$ and X with a reservoir at the downstream end.

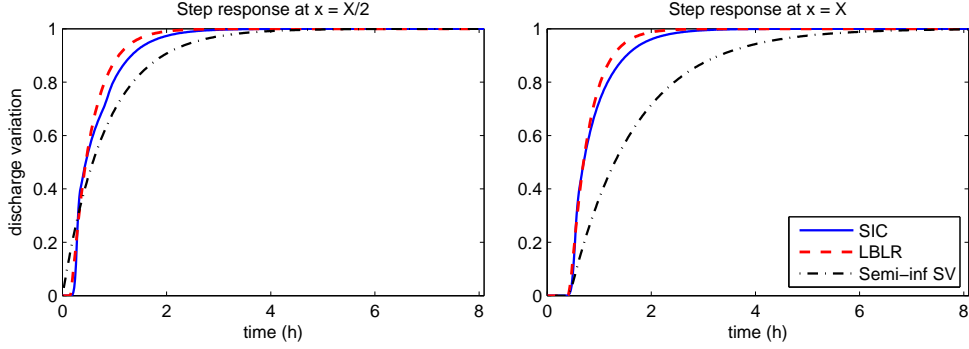


Fig. 5. Step response at $X/2$ and X with a reservoir at the downstream end.

LBLR model satisfactorily reproduces these changes, at both location $X/2$ and X . The differences are also visible in the time domain in Fig. 5, where LBLR response remains close to that of SIC.

5.3 Cross structure effect: a gate at the downstream end

In the second simulation, a gate is added at the downstream end of the channel reach. Characteristics of the gate are listed in table 2. Fig. 6 represents the backwater curve and its approximation for this case. Figs. 7 and 8 show the Bode diagram and the step response of the two approximate models and the complete Saint-Venant model.

In this case, the downstream water depth is close to normal depth. Hence, the non-uniform part is very short (see Fig. 6), and backwater effects are negligible. Consequently, the difference shown at the downstream end (in the frequency domain and in the time domain) is essentially due to feedback effects. The LBLR model satisfactorily takes these effects into account. One can also note that the transfer at $x = X/2$ is not significantly affected by the change in the downstream boundary condition (see left-hand side of Fig. 7), whereas

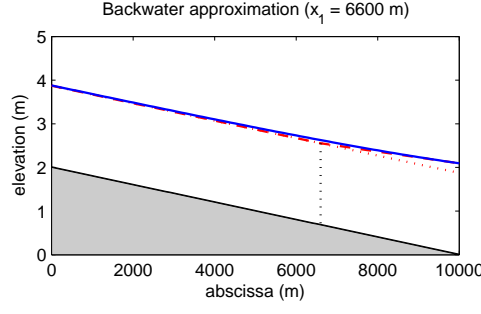


Fig. 6. Backwater curve and its approximation with a gate at the downstream end. Real backwater curve (—), uniform normal depth Y_n (\cdots) and approximate backwater curve (— —). x_1 is also represented.

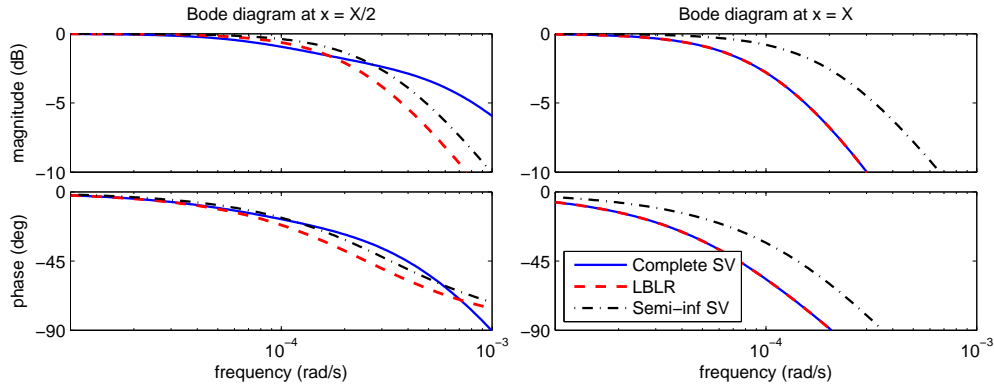


Fig. 7. Bode diagram at $X/2$ and X with a gate at the downstream end.

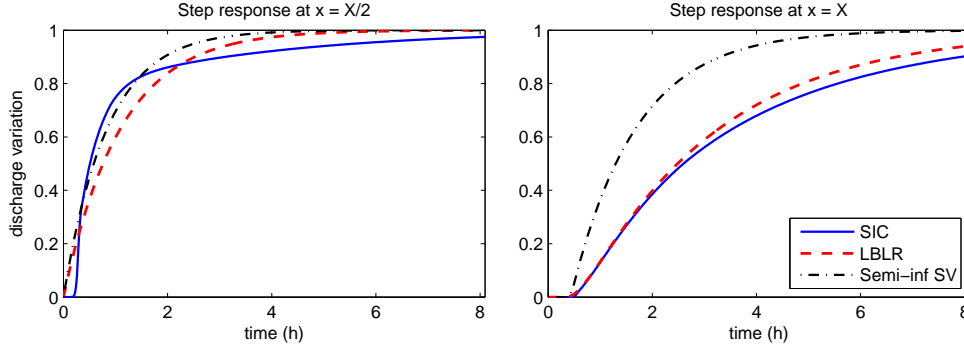


Fig. 8. Step response at $X/2$ and X with a gate at the downstream end.

it has a greater impact on transfer at the downstream end of the reach (see right-hand side of Fig. 7). Lastly, the magnitude of the complete Saint-Venant solution in the high frequency is higher at $X/2$ than at X . Yet, the semi-infinite model and the LBLR model are first or second orders based on a low frequency approximation. Their responses logically differ a little from the complete Saint-Venant one at $x = X/2$, where higher frequencies are solicited.

5.4 Cross structure effect: a weir at the downstream end

In the last simulation, the gate is replaced by a weir. Its characteristics are listed in table 3. Fig. 9 represents the backwater curve and its approximation for this case. Figs. 10 and 11 show the Bode diagram and the step response of the two approximate models and the complete Saint-Venant model.

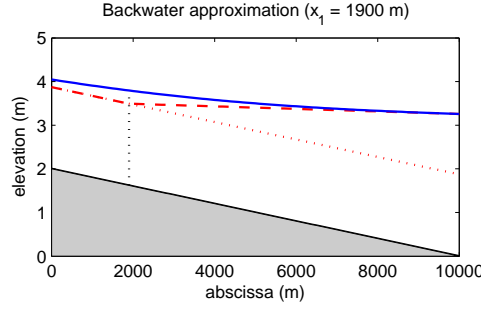


Fig. 9. Backwater curve and its approximation with a weir at the downstream end. Real backwater curve (—), uniform normal depth Y_n (\cdots) and approximate backwater curve ($- -$). Abscissa x_1 is also represented.

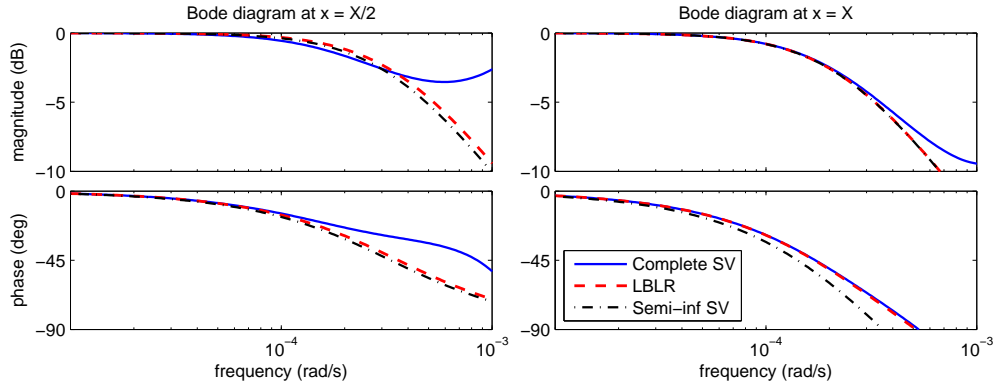


Fig. 10. Bode diagram at $X/2$ and X with a weir at the downstream end.

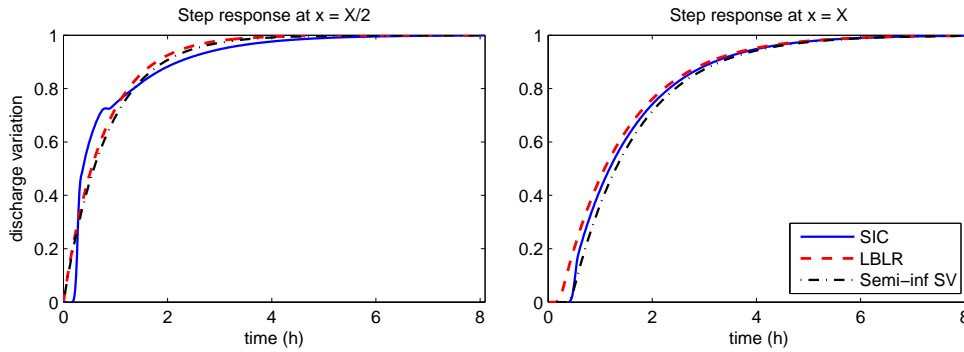


Fig. 11. Step response at $X/2$ and X with a weir at the downstream end.

Fig. 9 shows that this downstream boundary condition imposes a largely non-uniform flow, so that backwater effects are non negligible. Yet, the semi-infinite

model and the LBLR model are very close to the complete Saint-Venant model in the low frequency range, and in the time domain, as much in the middle of the reach as at the downstream end. This simulation shows that backwater effects can be compensated by feedback effects. In fact, the feedback coefficient k in this case is greater than the one in the uniform case k_n ($k = 1.34k_n$), which accelerates the flow dynamics (see the case of a reservoir in section 5.2). On the other hand, backwater effects are responsible for a deceleration of the dynamics, which compensates for the feedback effects. In some cases, like this one, the semi-infinite model could be sufficient to reproduce the dynamics despite the presence of a hydraulic structure at the downstream end.

6 Summary and discussion

6.1 Discussion: response time to a step inflow

The downstream boundary condition, usually neglected in flow routing methods which merely consider a semi-infinite channel and a uniform flow, may significantly influence flow dynamics. The moment matching method on the linearized Saint-Venant transfer function coupled with the linearized feedback equation at the downstream boundary allowed us to build a new approximate model, a second-order-with-delay called LBLR. The delay time τ and the time constants K_1 and K_2 are expressed analytically as closed-form expressions of the pool characteristics (geometry, friction, discharge, downstream water depth, and the feedback parameter).

Results show that the LBLR model satisfactorily takes into account the effects of the downstream boundary condition. Indeed the LBLR solution accurately matches the one of the complete Saint-Venant model when the downstream conditions vary (feedback or backwater effects), while the semi-infinite Saint-Venant model does not react to those variations. This difference can be quantified by measuring the response time at 80%, which corresponds to the time when the downstream discharge variation reaches $0.8 \text{ m}^3/\text{s}$ out of a step input of $1 \text{ m}^3/\text{s}$. Table 4 summarizes the response time ($\text{RT}_{80\%}$) at $x = X$ for each model and each simulation, and the relative error (ϵ_r) with respect to the complete Saint-Venant model.

Finally, the LBLR model greatly improves the estimation of the flow dynamics in canals possessing a simple geometry, by providing closed-form expressions of the coefficients that describe the chosen approximate model (e.g. a second-order-with-delay). The model is obtained via three main approximations which are the limitations of the method: the low frequency approximation (moment matching method), the backwater curve approximation and the linearization

Table 4

Response time at 80% ($RT_{80\%}$) at $x = X$ for each model and each simulation and relative error (ϵ_r) with respect to the complete Saint-Venant model.

Model	SIC		LBLR		Semi-infinite	
Simulation	$RT_{80\%}$	ϵ_r	$RT_{80\%}$	ϵ_r	$RT_{80\%}$	ϵ_r
Reservoir	1.17 h	-	1.04 h	11%	2.44 h	109%
Gate	5.57 h	-	4.89 h	12%	2.44 h	56%
Weir	2.33 h	-	2.23 h	4%	2.44 h	5%

around a steady state flow. These approximations may explain the minor difference observed on the graphs between the responses of the LBLR model and the complete Saint-Venant one.

6.2 Variations of model parameters as functions of the discharge

The time constants τ, K_1, K_2 of the approximate transfer function can be expressed as closed-form expressions of the reference discharge Q . To represent this, an abacus can be drawn, which represents these constants with respect to the reference discharge for a given downstream boundary condition and at a given position in the channel. For instance, Fig. 12 shows the variations of the time constants with respect to the reference discharge at the downstream end of the reach in the uniform case.

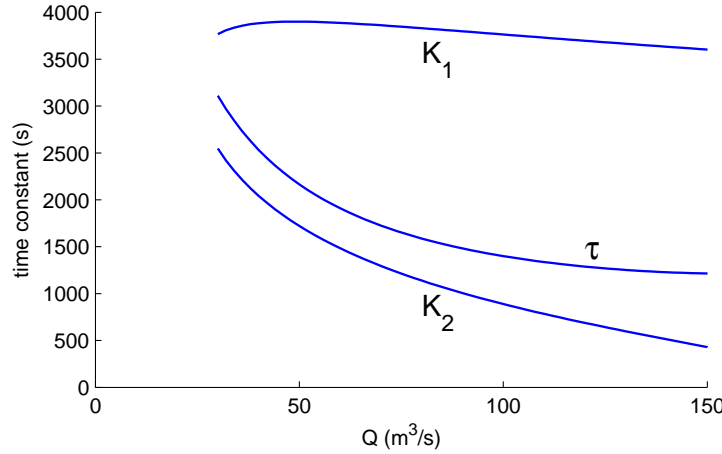


Fig. 12. Evolution of the coefficients τ, K_1, K_2 with respect to the reference discharge Q , at the downstream end of the reach.

As we expected, the time-delay τ decreases when the discharge Q increases. Similarly, the response time can be given as a closed-form expression, and an abacus can be drawn representing the response time with respect to the reference discharge and a given downstream boundary condition.

Through the time constants variations, this graph shows the influence of the chosen reference discharge on the flow dynamics. This is a consequence of the non-linearity of the Saint-Venant equations. A non-linear extension is envisaged, following either a multilinear approach (e.g. [3,5,12,22]) or a non-linear extension (e.g. [18]). However, we will see in the next section that the linear assumption may be sufficient to capture the main features of the flow routing process.

6.3 Attenuation in flood propagation

Two important characteristics of flood propagation are the attenuation level of the peak flow and the peak time. In this section, the previous example canal is considered with a weir at the downstream end. The weir is 80 m long, and 2 m high, with a discharge coefficient of 0.4. Eq. (12) is used to characterize the weir. The upstream discharge routed through the channel is defined as follows:

$$Q(0, t) = Q_m + (Q_M - Q_m) \frac{t}{T_0} e^{1 - \frac{t}{T_0}} \quad \text{if } t \geq 0 \quad (38)$$

where $Q_m = 20 \text{ m}^3/\text{s}$ and $Q_M = 120 \text{ m}^3/\text{s}$ are the minimum and maximum discharges respectively, and $T_0 = 2 \text{ h}$ is the upstream time to peak. The reference discharge is set to the mean value of the upstream discharge: $Q = 56 \text{ m}^3/\text{s}$. With the chosen downstream boundary condition, this leads to $Y_X = 1.92Y_n$ and $k = 2.21k_n$. Fig. 13 shows the response to the upstream hydrograph at $x = X/2$ and $x = X$.

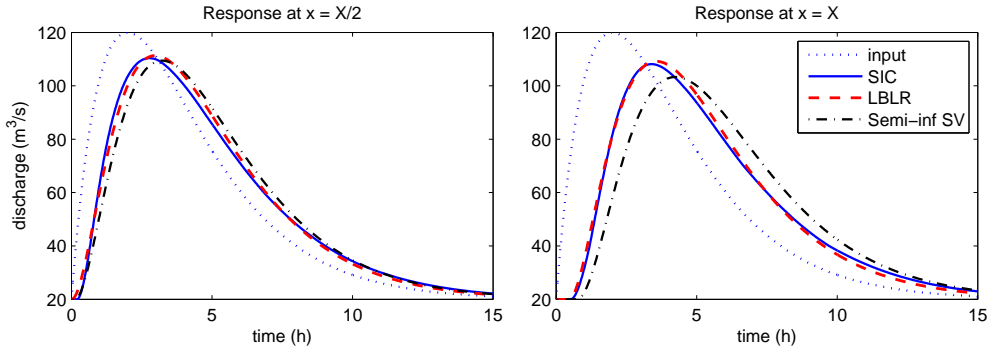


Fig. 13. Simulation of the response in the time domain at $x = X/2$ and $x = X$.

The attenuation level is defined as the difference between the upstream maximum discharge and the maximum discharge at the abscissa x . Table 5 summarizes, for each simulation, the attenuation level and the peak time at the downstream end of the channel ($x = X$). The relative error with respect to SIC results is given in brackets.

Table 5

Attenuation level and peak time at $x = X$ for each simulation. Relative error with respect to SIC results is given in brackets.

Model	SIC	LBLR	Semi-infinite
attenuation (m^3/s)	11.9	10.8 (9.2 %)	16.7 (40.3 %)
peak time (h)	3.42	3.57 (4.4 %)	4.26 (24.6 %)

For this realistic example case, accounting for the downstream boundary condition leads to a great improvement in the simulation of peak flow attenuation. In addition, although the upstream discharge varies from 20 to 120 m^3/s in this simulation, the linearization of the Saint-Venant equations seems to be still valid according to the good results obtained with the LBLR model. Let us also notice that the peak time is correctly reproduced by the LBLR model, while it is largely overestimated by the model which uses the semi infinite assumption.

6.4 Criteria on the downstream boundary condition

It is usual in the literature to perform simulation on longer river stretches in order to minimize the effects of the downstream boundary condition (see e.g. [4]). In that case, the semi-infinite canal is usually simulated with a three to five times longer canal. The LBLR model can be used to provide a quantification of this approximation. For instance, let us consider the response time (defined in section 6.1) for the example canal. We first estimate the response time at the distance $x = \bar{X} = 10000$ m calculated with the semi-infinite Saint-Venant model and denoted $\text{RT}_{\text{semi-inf}}$. Then we vary the downstream water depth Y_X and the feedback coefficient k in the intervals $[0.5Y_n, 4Y_n]$ and $[0.1k_n, 3k_n]$, respectively. Each couple (Y_X, k) represents a particular downstream boundary condition. We expect that the response time at $x = \bar{X}$, denoted RT_{LBLR} , calculated with the LBLR model tends to $\text{RT}_{\text{semi-inf}}$ when the length of the canal X increases. We define the distance X_∞ as the minimum length X from which the relative error between $\text{RT}_{\text{semi-inf}}$ and RT_{LBLR} is lower than 5%.

Fig. 14 shows the evolution of X_∞/\bar{X} with respect to Y_X/Y_n and k/k_n . $X_\infty/\bar{X} = 1$ means that the downstream boundary condition has almost no effect on the dynamics. On the contrary, $X_\infty/\bar{X} = 5$ means that the length of the canal has to be multiplied by 5 to ensure an error on the response time lower than 5%.

This graph shows that backwater effects as well as feedback effects can have a large impact on the dynamics. The black zone corresponds to the cases where those two effects are compensated, which means that the channel has quite the same behavior with or without the downstream boundary condition. One

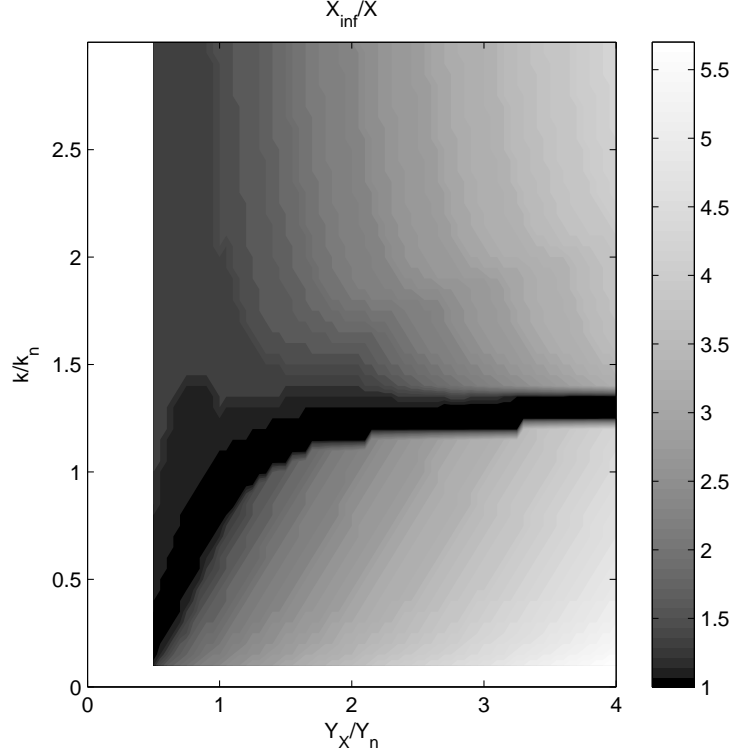


Fig. 14. Evolution of X_∞/\bar{X} with respect to Y_X/Y_n and k/k_n .

may conclude that, even under normal flow conditions ($Y_X = Y_n$), feedback effect can have an important impact on dynamics, especially for low values of the feedback coefficient k . The graph also leads to the other conclusion that for the particular value of $k = 1.3k_n$, backwater effects have almost no impact on the dynamics, as shown previously with the canal ended by a weir. For the flood routing process, similar criteria can be built based on the calculation of the peak time or of the attenuation of the peak discharge.

7 Conclusion

The article proposes a new analytical and distributed model to approximate flow transfer for a non-uniform open-channel pool. The LBLR is a first- or second-order-with-delay transfer function that approximates the complete transfer matrix of the linearized Saint-Venant equations coupled with a downstream boundary condition. The model has been shown to efficiently reproduce the dynamic behavior of an open-channel with backwater and different downstream boundary conditions.

The main advantages of this model are that it gives the discharge at any location in the channel depending on the discharge at the upstream end, it

integrates the flow non-uniformity due to downstream hydraulic structures, and results are given as closed-form expressions, so quick computations are made possible.

Many applications are possible, from an accurate flow routing to the estimation of the response time or the attenuation level in a prismatic open-channel, even in the case of large discharge variations. The research of equivalent geometric characteristics for non prismatic channels is under study. At the same time, this model remains simple enough to be used for controller design for open-channel, such as downstream PI controllers, or even for advanced controller design (e.g. multivariable controllers).

8 Acknowledgment

This work was jointly supported by Region Languedoc Roussillon and Cemagref within the PhD thesis of Simon Munier, under the supervision of X. Litrico and G. Belaud.

References

- [1] Balogun OS, Hubbard M, DeVries JJ. Automatic control of canal flow using linear quadratic regulator theory. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1988;114:75-102.
- [2] Baume JP, Malaterre PO, Belaud G, Le Guennec B. SIC: a 1D Hydrodynamic Model for River and Irrigation Canal Modeling and Regulation. *Métodos Numéricos em Recursos Hídricos*, 2005;7:1-81.
- [3] Becker A, Kundzewicz ZW. Nonlinear flood routing with multilinear models. *Water Resources Research*, 1987;23(6):1043-1048.
- [4] Bentura PLF, Michel C. Flood routing in a wide channel with a quadratic lag-and-route method. *Hydrological Sciences*, 1997;42(2):169-189.
- [5] Camacho LA, Lees MJ. Multilinear discrete lag-cascade model for channel routing. *Journal of Hydrology*, 1999;226(1-2):30-47.
- [6] Chow V. *Open-channel Hydraulics*. McGraw-Hill Book Company, New York. 1988. 680 p.
- [7] Chung WH, Aldama AA, Smith JA. On the effects of downstream boundary conditions on diffusive flood routing. *Advances in Water Resources*, 1993;16(5):259-275.

- [8] Dooge J, Napiórkowski J, Strupczewski W. The linear downstream response of a generalized uniform channel. *Acta Geophysica Polonica*, 1987a;XXXV(3):279-293.
- [9] Dooge J, Napiórkowski J, Strupczewski W. Properties of the generalized downstream channel response. *Acta Geophysica Polonica*, 1987b;XXXV(6):967-972.
- [10] Garcia A, Hubbard M, DeVries JJ. Open channel transient flow control by discrete time LQR methods. *Automatica*, 1992;28:255-264.
- [11] Hurand, P. and Kosuth, P. Régulations en rivière. *La Houille Blanche*, 1993;2/3:143-149.
- [12] Kundzewicz ZW. Multilinear flood routing. *Acta Geophysica Polonica*, 1984;32(4):419-445.
- [13] Litrico, X. Robust IMC flow control of SIMO dam-river open-channel systems. *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 2002;10:432-437.
- [14] Litrico X, Fromion V. Frequency modeling of open channel flow. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2004a;130(8):806-815.
- [15] Litrico X, Fromion V. Simplified modeling of irrigation canals for controller design. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 2004b;130(5):373-383.
- [16] Litrico X, Fromion V. Boundary control of linearized Saint-Venant equations oscillating modes. *Automatica*, 2006;42(6):967-972.
- [17] Litrico, X. and Georges, D. Robust continuous-time and discrete-time flow control of a dam-river system (I): Modelling & (II): Controller Design. *Applied Mathematical Modelling*, 1999;23:809-827,829-846.
- [18] Litrico X, Pomet JB. Nonlinear modeling and control of a long river stretch. *European Control Conference*. 2003.
- [19] Lundberg KH, Miller HR, Trumper DL. Initial conditions, generalized functions, and the Laplace transform: Troubles at the origin. *IEEE Control Systems Magazine*, 2007;27(1):22-35.
- [20] Malaterre, PO. Modélisation analyse et commande optimale LQR d'un canal d'irrigation. M. Sc. thesis, LAAS - CNRS - ENGREF - Cemagref. 1994. In French.
- [21] Malaterre, PO. PILOTE: Linear quadratic optimal controller for irrigation canals. *J. Irrig. Drain. Eng.*, 1998;124:187-194.
- [22] Perumal M. Multilinear discrete cascade model for channel routing. *Journal of Hydrology*, 1994;158(1-2):135-150.
- [23] Rey J. Contribution à la modélisation et la régulation des transferts d'eau sur des systèmes de type rivière/baches intermédiaires. M. Sc. thesis, Université Montpellier 2. 1990. In French.

- [24] Schuurmans J, Clemmens AJ, Dijkstra S, Hof A, Brouwer R. Modeling of irrigation and drainage canals for controller design. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 1999;125(6):338-344.
- [25] Strelkoff TS, Deltour JL, Burt CM, Clemmens AJ, Baume JP. Influence of Canal Geometry and Dynamics on Controllability. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 1998;124(1):16-22.
- [26] Tsai CW. Applicability of kinematic, noninertia, and quasi-steady dynamic wave models to unsteady flow routing. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2003;129(8):613-627.
- [27] Tsai CW. Flood routing in mild-sloped rivers-wave characteristics and downstream backwater effect. *Journal of Hydrology*, 2005;308(1-4):151-167.
- [28] Weinmann P, Laurenson E. Approximate flood routing methods: A review. *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, 1979;105:1521-1536.

Appendix

A Computation of Saint-Venant Transfer Matrix

Applying Laplace transform to the linear partial differential Eqs. (2) and (3), and reordering leads to an ordinary differential equation in the variable x , with a complex parameter s (the Laplace variable):

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} q(x, s) \\ y(x, s) \end{pmatrix} = \mathcal{A}_s \begin{pmatrix} q(x, s) \\ y(x, s) \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$\text{with } \mathcal{A}_s = \begin{pmatrix} 0 & -Ts \\ -\frac{s-\mu}{T(\mathcal{C}^2-V^2)} & \frac{2VTs+\nu}{T(\mathcal{C}^2-V^2)} \end{pmatrix}$$

There are two boundary conditions $q(0, s)$ in $x = 0$ and $q(X, s)$ in $x = X$. Let us consider the integration of this linear system

$$\frac{d\xi_s(x)}{dx} = \mathcal{A}_s \xi_s(x) \quad (\text{A.2})$$

with $\xi_s(x) = (q(x, s), y(x, s))^T$ and where the initial condition is defined at $x = 0$. The solution of the system always exists and is given by:

$$\xi_s(x) = \Gamma_s(x) \xi_{s0} = \begin{pmatrix} \gamma_{11}(x, s) & \gamma_{12}(x, s) \\ \gamma_{21}(x, s) & \gamma_{22}(x, s) \end{pmatrix} \xi_{s0} \quad (\text{A.3})$$

where $\Gamma_s(x)$ is the transition matrix and ξ_{s0} the upstream condition at $x = 0$.

To solve this equation, let us diagonalize matrix \mathcal{A}_s :

$$\mathcal{A}_s = P_s D_s P_s^{-1}$$

with

$$\begin{aligned}
D_s &= \begin{pmatrix} \lambda_1(s) & 0 \\ 0 & \lambda_2(s) \end{pmatrix}, \\
P_s &= \frac{1}{Ts} \begin{pmatrix} Ts & Ts \\ -\lambda_1(s) & -\lambda_2(s) \end{pmatrix}, \\
P_s^{-1} &= \frac{1}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} \begin{pmatrix} -\lambda_2(s) & -Ts \\ \lambda_1(s) & Ts \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

and the eigenvalues:

$$\begin{aligned}
\lambda_i &= \alpha + (-1)^i \beta, \quad i = 1, 2 \\
\alpha &= a + bs \\
\beta &= \sqrt{(2ad + c^2)s^2 + 2acs + a^2}
\end{aligned}$$

with $a = \frac{\nu}{2T(\mathcal{C}^2 - V^2)}$, $b = \frac{V}{\mathcal{C}^2 - V^2}$, $c = \frac{V\nu - (\mathcal{C}^2 - V^2)T\mu}{\nu(\mathcal{C}^2 - V^2)}$, $d = \frac{1}{2a} \left[\frac{\mathcal{C}^2}{(\mathcal{C}^2 - V^2)^2} - c^2 \right]$.

In the uniform case, the transition matrix $\Gamma_s(x)$ of (A.2) between 0 and x , is given by the following closed-form expression ([14]):

$$\Gamma_s(x) = P_s e^{D_s x} P_s^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1 e^{\lambda_2 x} - \lambda_2 e^{\lambda_1 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} & \frac{Ts(e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_1 x})}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ \frac{\lambda_1 \lambda_2 (e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x})}{Ts(\lambda_1 - \lambda_2)} & \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 x} - \lambda_2 e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Finally the solution of the ordinary differential Eq. (A.2) is:

$$\begin{pmatrix} q(x, s) \\ y(x, s) \end{pmatrix} = \Gamma_s(x) \begin{pmatrix} q(0, s) \\ y(0, s) \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

B Taylor series expansion of the Saint-Venant transfer function

The method to obtain the Taylor series expansion of the Saint-Venant transfer function is detailed in this section.

$$TF(x, s) = A(x) + B(x)s + C(x)s^2 + D(x)s^3 + o(s^3) \quad (\text{B.1})$$

B.1 Some preliminary computations

The elements of the transfer matrix Γ are expressed as functions of λ_1 and λ_2 or as functions of α and β . So writing the Taylor series of α and β leads to the Taylor series of the elements of $\Gamma(x, s)$.

To make sure that no term will be forgotten in the computations, we choose to compute the fourth order Taylor series of α and β , given by:

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= a + bs \\ \beta(s) &= a + cs + ds^2 - \frac{cd}{a}s^3 + \left(\frac{c^2d}{a^2} - \frac{d^2}{2a}\right)s^4\end{aligned}$$

In order to simplify the computations, we define three intermediate variables $Z_{1x}(s)$, $Z_{2x}(s)$, $Z_{3x}(s)$. The following equations resume these variables and their Taylor series:

$$Z_{1x}(s) = e^{-2\beta x} = A_{1x} + B_{1x}s + C_{1x}s^2 + D_{1x}s^3 + E_{1x}s^4 \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned}A_{1x} &= e^{-2ax} \\ B_{1x} &= -2cxe^{-2ax} \\ C_{1x} &= -2x(d - c^2x)e^{-2ax} \\ D_{1x} &= -4cx \left[\frac{1}{3}c^2x^2 - 2ad \left(1 + \frac{x}{2a}\right) \right] e^{-2ax} \\ E_{1x} &= \left[\left(\frac{d^2x}{a} - 2\frac{c^2dx}{a^2} \right) (1 + 2ax) - 4c^2dx^3 + \frac{2}{3}c^4x^4 \right] e^{-2ax}\end{aligned}$$

$$Z_{2x}(s) = e^{(\alpha+\beta)x} = A_{2x} + B_{2x}s + C_{2x}s^2 + D_{2x}s^3 + E_{2x}s^4 \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned}A_{2x} &= e^{2ax} \\ B_{2x} &= (b+c)xe^{2ax} \\ C_{2x} &= \left(dx + \frac{1}{2}(b+c)^2x^2 \right) e^{2ax} \\ D_{2x} &= \left(-\frac{cdx}{a} + (b+c)dx^2 + \frac{1}{6}(b+c)^3x^3 \right) e^{2ax} \\ E_{2x} &= \left[\frac{c^2dx}{a^2} - \frac{cdx^2}{a}(b+c) - \frac{d^2x}{2a}(1-ax) + \frac{1}{2}x^2(b+c)^2 \left(dx + \frac{1}{12}(b+c)^2x^2 \right) \right] e^{2ax}\end{aligned}$$

$$Z_{3x}(s) = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{T_s} = A_{3x} + B_{3x}s + C_{3x}s^2 + D_{3x}s^3 + E_{3x}s^4 \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned}
A_{3x} &= \frac{2}{T}a(b-c) \\
B_{3x} &= \frac{1}{T}(b^2 - c^2 - 2ad) \\
C_{3x} &= 0 \\
D_{3x} &= 0 \\
E_{3x} &= 0
\end{aligned}$$

We also define two operators \mathcal{M} and \mathcal{D} . These operators are used to compute the Taylor series of the multiplication $F_1(s)F_2(s)$ and the division $F_1(s)/F_2(s)$, where $F_1(s) = A_1 + B_1s + C_1s^2 + D_1s^3 + E_1s^4$ and $F_2(s) = A_2 + B_2s + C_2s^2 + D_2s^3 + E_2s^4$.

If $F_M = \mathcal{M}(F_1, F_2)$ and $F_D = \mathcal{D}(F_1, F_2)$ and if the Taylor series of $F_M(s)$ and $F_D(s)$ are given by:

$$\begin{aligned}
F_M(s) &= A_M + B_Ms + C_Ms^2 + D_Ms^3 + E_Ms^4 \\
F_D(s) &= A_D + B_Ds + C_Ds^2 + D_Ds^3 + E_Ds^4
\end{aligned}$$

then operators \mathcal{M} and \mathcal{D} give:

$$\begin{aligned}
A_M &= A_1A_2 \\
B_M &= A_1B_2 + B_1A_2 \\
C_M &= A_1C_2 + B_1B_2 + C_1A_2 \\
D_M &= A_1D_2 + B_1C_2 + C_1B_2 + D_1A_2 \\
E_M &= A_1E_2 + B_1D_2 + C_1C_2 + D_1B_2 + E_1A_2
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
A_D &= \frac{A_1}{A_2} \\
B_D &= \frac{1}{A_2} \left(B_1 - \frac{A_1B_2}{A_2} \right) \\
C_D &= \frac{1}{A_2} \left[C_1 - \frac{B_1B_2}{A_2} - \frac{A_1}{A_2} \left(C_2 - \frac{B_2^2}{A_2} \right) \right] \\
D_D &= \frac{1}{A_2} \left[D_1 - \frac{C_1B_2}{A_2} - \frac{B_1}{A_2} \left(C_2 - \frac{B_2^2}{A_2} \right) - \frac{A_1}{A_2} \left(D_2 - 2\frac{B_2C_2}{A_2} + \frac{B_2^3}{A_2^2} \right) \right] \\
E_D &= \frac{1}{A_2} \left[E_1 - \frac{D_1B_2}{A_2} - \frac{C_1}{A_2} \left(C_2 - \frac{B_2^2}{A_2} \right) - \frac{B_1}{A_2} \left(D_2 - 2\frac{B_2C_2}{A_2} + \frac{B_2^3}{A_2^2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{A_1}{A_2} \left(E_2 - 2\frac{B_2D_2 + C_2^2}{A_2} + 3\frac{B_2^2C_2}{A_2^2} - \frac{B_2^4}{A_2^3} \right) \right]
\end{aligned}$$

We define a last intermediate variable $\delta_x(s)$ as following:

$$\delta_x(s) = \frac{1 - e^{-2\beta x}}{2\beta} e^{(\alpha+\beta)x} = \frac{1 - Z_{1x}}{2\beta} Z_{2x} \quad (\text{B.5})$$

Knowing the Taylor series of Z_{1x} and Z_{2x} and using the two operators \mathcal{M} and \mathcal{D} , we can compute the Taylor series of the function $\delta_x(s)$:

$$\delta_x(s) = \mathcal{M} [\mathcal{D} (1 - Z_{1x}, 2\beta), Z_{2x}] \quad (\text{B.6})$$

B.2 Transfer Matrix Γ and Transfer Function TF

All the elements of the transfer matrix $\Gamma(x, s)$ can be expressed from the four variables previously introduced.

$$\gamma_{11}(x, s) = Z_{2x}(s) - (\alpha + \beta)\delta_x(s) \quad (\text{B.7})$$

$$\gamma_{12}(x, s) = -Ts\delta_x(s) \quad (\text{B.8})$$

$$\gamma_{21}(x, s) = Z_{3x}(s)\delta_x(s) \quad (\text{B.9})$$

$$\gamma_{22}(x, s) = Z_{2x}(s) + (\alpha - \beta)\delta_x(s) \quad (\text{B.10})$$

So knowing the Taylor series of these intermediate variables, we can use the two operators \mathcal{M} and \mathcal{D} to compute the Taylor series of each $\gamma_{ij}(x, s)$.

$$\gamma_{11}(x, s) = Z_{2x}(s) - \mathcal{M}(\alpha + \beta, \delta_x(s)) \quad (\text{B.11})$$

$$\gamma_{12}(x, s) = -\mathcal{M}(Ts, \delta_x(s)) \quad (\text{B.12})$$

$$\gamma_{21}(x, s) = \mathcal{M}(Z_{3x}(s), \delta_x(s)) \quad (\text{B.13})$$

$$\gamma_{22}(x, s) = Z_{2x}(s) + \mathcal{M}(\alpha - \beta, \delta_x(s)) \quad (\text{B.14})$$

In the same way, we compute the Taylor series of $\gamma_{ij}(X, s)$.

Then it is possible to compute the Taylor series of $k_0(X, s)$ (Eq. (14)):

$$k_0(X, s) = -\mathcal{D}(\gamma_{12}(X, s) - k\gamma_{22}(X, s), \gamma_{11}(X, s) - k\gamma_{21}(X, s)). \quad (\text{B.15})$$

Finally we get the Taylor series of $TF(x, s)$ (Eq. (15)):

$$TF(x, s) = \gamma_{11}(x, s) + \mathcal{D}(\gamma_{12}(x, s), k_0(X, s)) \quad (\text{B.16})$$

One can remark that for $s = 0$, $\gamma_{11}(x, 0) = 1$ and $\gamma_{12}(x, 0) = 0$, which leads to $TF(x, 0) = A(x) = 1$. This means that the static gain of the approximate transfer function is equal to 1. This result is in agreement with the conservative property of the flow.

C Taylor series expansion of the Saint-Venant transfer function in the non uniform case

In the non-uniform case, the reach is split into two sub-pools. Variables $a, b, c, d, x, X, T, \alpha, \beta$ are replaced by their values corresponding to each sub-pool. In that sense, matrix $\Gamma(x, s)$ is replaced by $\underline{\Gamma}(\underline{x}, s)$ and $\bar{\Gamma}(\bar{x}, s)$ respectively, where $\underline{x} = x$ and $\underline{X} = x_1$ are the relative position and the length of the uniform part, and $\bar{x} = x - x_1$ and $\bar{X} = X - x_1$ are the relative position and the length of the backwater part (x_1 is the abscissa of the connection point).

The Taylor series of $\underline{\Gamma}(\underline{x}, s)$ and $\bar{\Gamma}(\bar{x}, s)$ are computed for each sub-pool (see appendix B). In the backwater part ($x_1 \leq x \leq X$), the Taylor series of $\hat{\Gamma}(x, s)$ is computed using operator \mathcal{M} .

Then we can compute the Taylor series of $\hat{k}_0(X, s)$ (Eq. (34)):

$$\hat{k}_0(X, s) = -\mathcal{D}(\hat{\gamma}_{12}(X, s) - k\hat{\gamma}_{22}(X, s), \hat{\gamma}_{11}(X, s) - k\hat{\gamma}_{21}(X, s)). \quad (\text{C.1})$$

Finally we get the Taylor series of $TF(x, s)$ (Eq. (33)):

$$TF(x, s) = \hat{\gamma}_{11}(x, s) + \mathcal{D}(\hat{\gamma}_{12}(x, s), \hat{k}_0(X, s)) \quad (\text{C.2})$$

D Moment matching method

D.1 Second-order-with-delay

The transfer function TF is approximated by a second-order-with-delay:

$$q(x, s) = \frac{g(x)e^{-\tau(x)s}}{(1 + K_1(x)s)(1 + K_2(x)s)}q(0, s) \quad (\text{D.1})$$

We use the following property of the R -th cumulant M_R (logarithmic moment) of a function $h(s)$ expressed in the Laplace domain:

$$M_R[h(s)] = (-1)^R \frac{d^R}{ds^R} [\log h(s)] \quad (\text{D.2})$$

The first four cumulants of $TF(x)$ are denoted $M_0(x)$, $M_1(x)$, $M_2(x)$ and $M_3(x)$.

Equating the cumulants of TF and its approximate form leads to:

$$\begin{cases} M_0(x) = \log g(x) \\ M_1(x) = \tau(x) + K_1(x) + K_2(x) \\ M_2(x) = K_1^2(x) + K_2^2(x) \\ M_3(x) = 2K_1^3(x) + 2K_2^3(x) \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

Let $S = K_1 + K_2$ and $P = K_1 K_2$:

$$S^2 = M_2 + 2P \quad (\text{D.4})$$

$$S^3 = \frac{M_3}{2} + 3PS \quad (\text{D.5})$$

which leads to the third order equation:

$$S^3 - 3M_2S + M_3 = 0 \quad (\text{D.6})$$

We can find (u, v) such as $u + v = S$ and $uv = T$. Then (D.6) leads to:

$$u^3 + v^3 + 3(T - M_2)(u + v) + M_3 = 0 \quad (\text{D.7})$$

If we choose $T = M_2$, we obtain the following system:

$$u^3 + v^3 = -M_3 \quad (\text{D.8})$$

$$u^3 v^3 = M_2^3 \quad (\text{D.9})$$

u^3 and v^3 are solutions of the second order equation:

$$X^2 + M_3X + M_2^3 = 0 \quad (\text{D.10})$$

If $M_3^2 \leq 4M_2^3$, the solutions of (D.10) are complex and this ensure the stability of the approximation by a second-order-with-delay. Otherwise the Saint-Venant transfer function can be approximated by a first-order-with-delay. The system to be solved is then given by the first three equations of the system (D.3) with $K_2 = 0$.

In the case where $\underline{M_3^2 < 4M_2^3}$, the solution of (D.3) is given by:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{M_3}{\sqrt{4M_2^3 - M_3^2}}\right) \\ S = 2\sqrt{M_2} \cos \frac{\phi}{3} \\ P = -M_2 - \frac{M_3}{2S} \\ \tau = M_1 - S \\ K_1 = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4P}}{2} \\ K_2 = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4P}}{2} \\ g = 1 \end{array} \right. \quad (\text{D.11})$$

D.2 First-order-with-delay

In the case where the second order approximate model is unstable ($M_3^2 \geq 4M_2^3$), it is possible to replace the second order by a first order.

$$q(x, s) = \frac{g(x)e^{-\tau(x)s}}{1 + K_1(x)s} q(0, s) \quad (\text{D.12})$$

Then $K_2 = 0$, and τ and K_1 are determined by equating the first three cumulants of the exact transfer function and the approximate one:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_0(x) = \log g(x) \\ M_1(x) = \tau(x) + K_1(x) \\ M_2(x) = K_1^2(x) \end{array} \right. \quad (\text{D.13})$$

which leads to:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau(x) = M_1(x) - \sqrt{M_2(x)} \\ K_1(x) = \sqrt{M_2(x)} \\ g(x) = 1 \end{array} \right. \quad (\text{D.14})$$

Annexe 2 : Closed-form Expression of the Response-Time of an Open-Channel

Simon Munier, Gilles Belaud et Xavier Litrico

Article soumis à *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*

Closed-form Expression of the Response-Time of an Open-Channel

S. Munier ¹, and G. Belaud ², and X. Litrico ³

Abstract

Computing accurately the response time of an open-channel is of extreme importance for management operations on canal networks, such as feed-forward control problems. The methods proposed in the literature to approximate the response time do not always account for the influence of a cross-structure at the downstream end of a canal pool, which may have a significant impact on the response time. This paper proposes a new approach to compute the response time, accounting explicitly for the backwater and the feedback effects due to the downstream cross structure. The method provides a distributed analytical expression of the response time as a function of the characteristics of the canal (geometry, roughness) and of the downstream cross structure. A test canal with a weir or a gate at the downstream end is used to compare the new method with some others. Results show that the proposed expression accurately reproduces the response time for various backwater and downstream boundary conditions.

CE Database subject headings: Open channel flow, Analytical model, Response time, Flow control, Canal design.

Introduction

The response time of an irrigation canal or a regulated river is usually defined as the time required for the system to transit from an initial steady state to a final steady state

¹Cemagref, UMR G-EAU, 361 rue J.F. Breton, B.P. 5095, 34196 Montpellier Cedex 5, France. E-mail: simon.munier@cemagref.fr.

²SupAgro, UMR G-EAU, 361 rue J.F. Breton, B.P. 5095, 34196 Montpellier Cedex 5, France. E-mail: belaud@msem.univ-montp2.fr.

³Cemagref, UMR G-EAU, 361 rue J.F. Breton, B.P. 5095, 34196 Montpellier Cedex 5, France. E-mail: xavier.litrico@cemagref.fr.

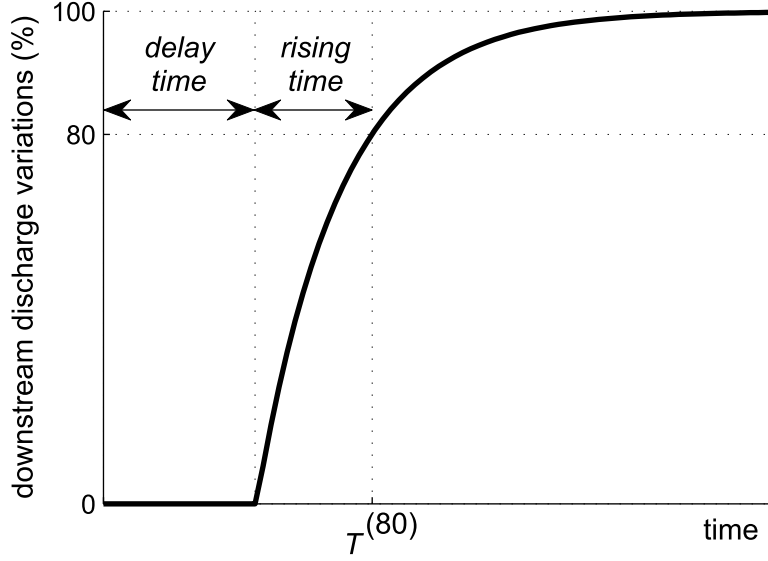


Fig. 1. Delay time and rising time for a step input.

(Ankum 1995). The time can be a few hours in medium-size canals or a few days in large canals or rivers and it depends on the discharge and water depth all along the canal pool. It represents key information for managers, especially when they have to release water into the system so as to achieve pre-specified distribution schedules.

The notion of response time is not clearly defined in the literature. In the following, the response time for a step input is defined as the sum of two terms: the delay time and the rising time (see Fig. 1). The delay time is the time at which the discharge increase is observed at the downstream end of the canal. The rising time is defined as the time required for the discharge to reach α % of the maximum discharge increase. In this paper, the response time at α % is denoted $T^{(\alpha)}$.

A standard approach is to approximate the response time to a step input by the time $T_{\Delta\mathcal{V}}$ necessary to supply a volume $\Delta\mathcal{V}$ of the dynamic storage, defined by the volume variation between the initial and the final steady state (Schuermans 1990; Burt and Plusquellec 1990). As pointed out by Ankum (1995), this definition leads to underestimate the response time as it ignores the fact that the outflow increases with the storage and the wave travel time is neglected. Schuurmans (1990) improved this estimation by coupling the discharge and

the water depth at the downstream end of the reach. This allowed him to compute an approximate expression of the response time at α %, denoted $T_{Sch}^{(\alpha)}$ in the following. The approximation performs well for short canals, which can be assumed to behave as storage basins. Schuurmans (1990) uses the diffusive wave equation to account for diffusion effects in long canals. Ankum (1995) proposed a simple method to estimate the response time at 100 %, denoted T_{Ank} in the following, considering that $T^{(50)}$ is close to the mean of $T^{(0)}$ and $T^{(100)}$. $T^{(0)}$ corresponds to the delay time, which is the time T_{DW} required for the dynamic waves to travel through the canal. T_{DW} is obtained by:

$$T_{DW} = \frac{x}{C + V} \quad (1)$$

where x is the distance along the canal, V is the mean flow velocity, $C = \sqrt{gA/T}$ the wave celerity with g the gravitational acceleration, A the wetted area and T the top width. The author assumed that $T^{(50)}$ is equal to $T_{\Delta V}$, which leads to the following expression of the response time:

$$T_{Ank} = 2T_{\Delta V} - T_{DW} \quad (2)$$

Although these estimates give quick indicators for the canal response, it is useful to define the response time more accurately, namely by considering the effects of a cross structure at the downstream end of the reach.

Schuurmans et al. (1995) adopted a frequency approach to establish the transfer function of a reach in uniform flow. To account for the downstream cross structures, they assumed that the backwater part behaved as a reservoir, in which the water level is horizontal. Their model was able to correctly reproduce a step inflow on two canals with backwater curves. Based on their method, Bautista and Clemmens (1999) proposed an improved estimation of the canal dynamics by taking the travel time in the backwater part into account. For the two example canals used later in this paper, the results obtained by Bautista and Clemmens (1999) are very similar to those obtained using the dynamic storage approximation ($T_{\Delta V}$),

despite a theoretically more accurate estimation of the response time. In the following, only $T_{\Delta V}$ will be represented.

Strelkoff et al. (1998) studied the influence of the downstream boundary condition with different hydraulic structures at the downstream end of the canal. The steady state regime was considered to be non-uniform. They used a numerical model to estimate the response to a step inflow. They showed that not only the downstream water depth (and the backwater curve) had an influence on the flow dynamics, but also the nature of the hydraulic structure at the downstream end (feedback effect).

The backwater effect can be considered as a static effect due to a cross structure at the downstream end, whereas the feedback effect may be considered as a dynamic effect due to the local relation between downstream discharge and water depth variations. Some of the previous methods to estimate the response time take the backwater effect into account by considering a backwater part where the flow dynamics is modified. But none of them accounts for the feedback effect, which may lead to important under- or overestimation of the response time as shown further.

Following the idea of Schuurmans et al. (1995) and Litrico and Fromion (2004b), Munier et al. (2008) proposed a linear model, called LBLR for Linear Backwater Lag and Route, that considered separately backwater and feedback effects, both evaluated using the equation characterizing the downstream cross structure. The model was obtained by approximating the frequency response of a canal (Litrico and Fromion 2004a) and allowed the authors to calculate the response at any abscissa along the canal, which gave satisfactory results compared to full Saint-Venant's numerical solutions. This paper aims at proposing a closed-form expression of the response time, derived from the LBLR model. The proposed formula explicitly accounts for the backwater and feedback effects due to the downstream boundary condition. Illustrations are given for different boundary conditions, for simulated and real data. Some design applications are proposed.

Analytical calculation of the response time

We first derive the LBLR model, before illustrating the results on a test canal.

Calculation of the response time using the LBLR model

We consider a trapezoidal prismatic channel. Time and distance are denoted t and x respectively, the discharge Q and the water depth Y are functions of (x, t) . The equations of the flow dynamics are linearized around a non uniform reference regime defined by Q_0 and $Y_0(x)$ (see Fig. 2). Small variations in discharge and water depth are denoted $q(x, t)$ and $y(x, t)$ respectively. At the cross structure, the discharge is related to the water depth using the discharge equation:

$$Q(X, t) = f(Y(X, t)) \quad (3)$$

In the following, Eqs. (4-5) are used to describe a weir and a gate respectively.

$$Q = \sqrt{2g}C_w L_w (Y - Z_w)^{3/2} \quad (4)$$

$$Q = \sqrt{2g}C_g L_g W_g \sqrt{Y} \quad (5)$$

where L_w is the weir length, Z_w the sill elevation, L_g the gate length, W_g the gate opening, C_w and C_g some discharge coefficients. The discharge equation is used to determine the downstream water depth $Y_X = Y_0(X)$ corresponding to the reference discharge Q_0 . In addition, the linearization of Eq. (3) leads to:

$$q(X, t) = ky(X, t) \quad (6)$$

where $k = \frac{df}{dY}$ is the feedback coefficient. One may obtain $k = \frac{3}{2} \frac{Q_0}{Y_X - Z_w}$ for a weir and $k = \frac{1}{2} \frac{Q_0}{Y_X}$ for a gate. The downstream boundary condition is then given by the couple (Y_X, k) .

In the method developed by Munier et al. (2008), the transfer function between the upstream discharge and the discharge at any location in the channel is approximated by a first-order-with-delay transfer function using the moment matching method. The backwater

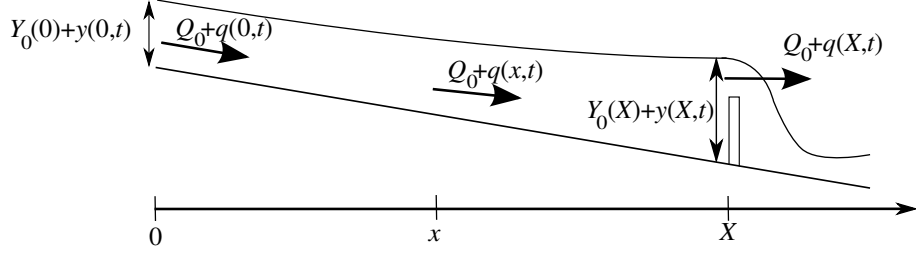


Fig. 2. General scheme of the considered channel.

effects are taken into account by decomposing the canal into two sub-pools and the feedback effects are represented by k . This leads to an analytical expression of the response to a step input at any location:

$$q(x, t) = \left(1 - e^{-\frac{t-\tau(x)}{K(x)}} \right) \quad (7)$$

where $\tau(x)$ and $K(x)$ are obtained as closed-form expressions of the physical parameters of the pool (geometry, friction, reference discharge) and of the downstream boundary condition (downstream water depth and feedback coefficient). Appendix I describes how the transfer function is evaluated and approximated. Details of the calculation of $\tau(x)$ and $K(x)$ are given in appendix II.

The delay time is given by $\tau(x)$, whereas the rising time only depends on $K(x)$. According to Eq. (7), the response time $T_{LBLR}^{(\alpha)}$ is given by:

$$T_{LBLR}^{(\alpha)}(x) = \tau(x) - K(x) \log \left(1 - \frac{\alpha}{100} \right) \quad (8)$$

The LBLR model has been implemented under the free software Scilab (www.scilab.org) and the files needed to compute the response time $T_{LBLR}^{(\alpha)}$ are available on request.

Application to a test canal

In order to compare the different methods of response time calculation, we use the test canal proposed by Strelkoff et al. (1998). The characteristics of the test canal are presented in Table 1.

The test canal considered here is rectangular (bank slope $m = 0$) but the analytical ex-

Table 1. Characteristics of the test canal.

Reference discharge	Length	Width	Bank slope	Bottom slope	Manning coefficient	Normal depth
Q_0	X	B	m	S_b	n	Y_n
1.9 m ³ /s	2300 m	2 m	0	0.00044	0.014 sm ^{-1/3}	1.00 m

pression of the response time presented further includes the case of a trapezoidal canal. The reference step response is calculated using SIC, a software that discretizes the Saint-Venant equations using a Preissmann scheme (Strelkoff et al. 1998; Baume et al. 2005). In the following, the time step and the space step are chosen in order to ensure an accurate simulation of the flow dynamics (Courant number close to unity). The corresponding response times are denoted $T_{SIC}^{(\alpha)}$.

Results are computed for three different downstream boundary conditions. The first one is defined by the Manning equation and represents a uniform flow. The two others are the weir and the gate used in Strelkoff et al. (1998). The weir is 21 m long, the sill elevation is 1.11 m and the discharge coefficient is 0.4. The gate is 2 m wide, its opening is 0.32 m and its discharge coefficient is 0.6. Both structures are considered in free flow. The weir and the gate have been calibrated so that the water depth at the downstream end of the canal is equal to $1.25Y_n$. In both cases the backwater curve is the same, leading to the same backwater effects. Yet, Strelkoff et al. (1998) showed that the step response is drastically different between both structures, which may be due to different feedback effects.

Graphs 3 and 4 illustrate the response to a step input calculated by SIC compared to the one calculated by the LBLR model. The step response for the uniform case (without any cross structure at the downstream end) is also represented. The comparison with the uniform case shows that the downstream cross structure can have a large impact on the flow dynamics. Both canals have the same backwater and the large difference between their responses is due to feedback effects. The LBLR model accurately simulates the step response in both cases.

Results and discussion

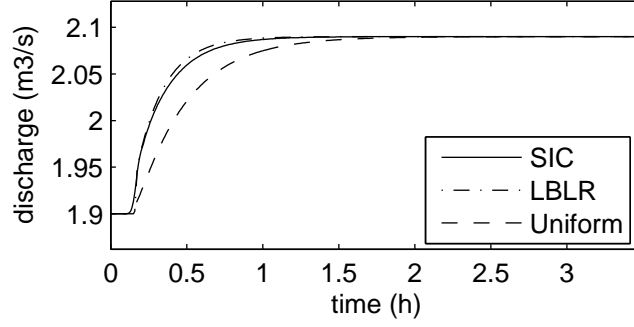


Fig. 3. Step response with a weir at the downstream end.

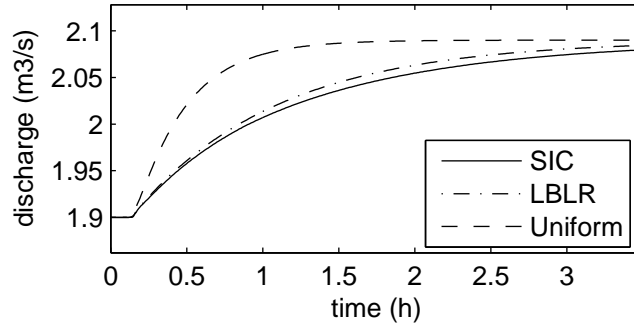


Fig. 4. Step response with a gate at the downstream end.

Computation of the response time with the different methods

The response time for the test canal has been calculated using the different methods presented in the review section. Figs. 5 and 6 show, for the weir and for the gate respectively, the evolution of the response time with respect to α , calculated using SIC or the LBLR model.

The LBLR method leads to a very good approximation of $T^{(\alpha)}$ for all values of α . It is able to accurately account for backwater and feedback effects. Here, the relative error of $T_{LBLR}^{(90)}$ compared to $T_{SIC}^{(90)}$ is only 11 % for the weir and 16 % for the gate.

The response times calculated with the other methods (T_{DW} , $T_{\Delta V}$, T_{Ank} , $T_{Sch}^{(\alpha)}$) are also represented on Fig. 5 and 6. As Ankum (1995) suggested, we assume that T_{DW} and $T_{\Delta V}$ correspond to $\alpha = 0$ and $\alpha = 50$ respectively.

The method developed by Schuurmans (1990), which does not account for the feedback effects, provides quite good results for the weir, but not for the gate. Indeed, a variation in

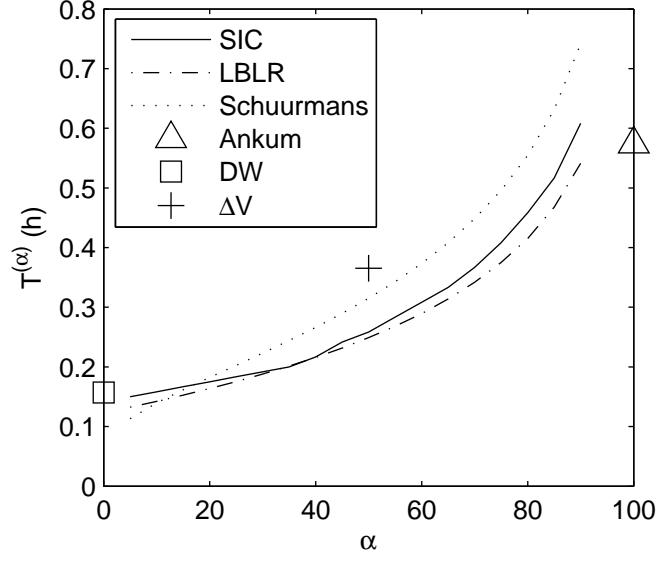


Fig. 5. Response time at α % with respect to α , with a weir at the downstream end.

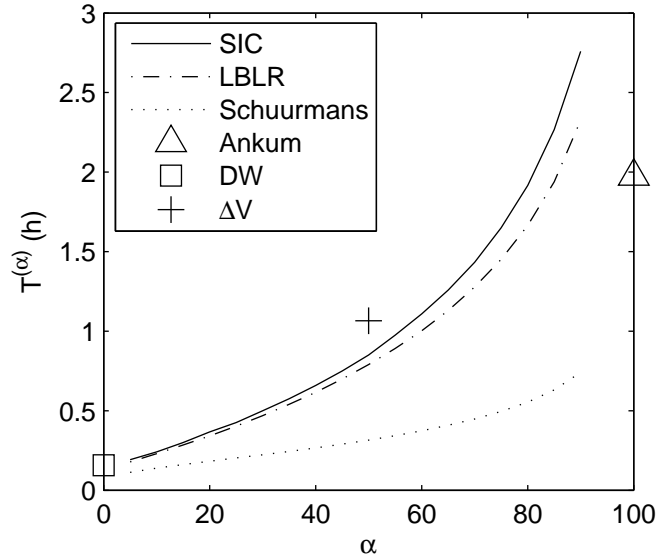


Fig. 6. Response time at α % with respect to α , with a gate at the downstream end.

the upstream discharge implies a smaller variation in the downstream water depth for the weir than for the gate. This is due to the fact that the feedback coefficient k is larger in the case of the weir, which provides a better control of the downstream level.

These graphs also show that T_{DW} is quite the same in both cases and is suitable to estimate $T^{(0)}$. Besides, $T_{\Delta V}$ varies a lot between both cases, but remains close to $T^{(50)}$.

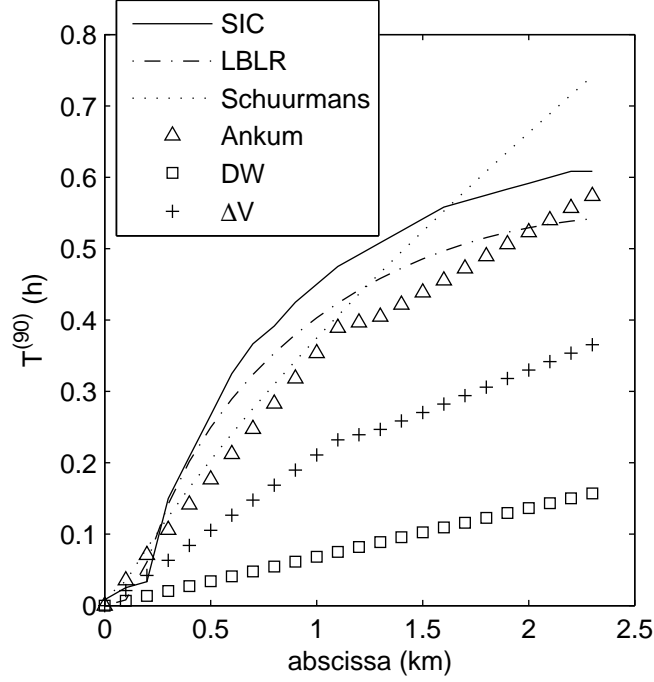


Fig. 7. Response time at 90 % all along the channel with a weir at the downstream end.

In fact, the method to compute $T_{\Delta V}$ uses the volume variation between the initial and final steady states. This requires the calculation of the water depth variation induced by the discharge variation, which is related to the feedback effect. As a consequence, in this method, the backwater and the feedback effects are taken into account. For these two methods, the relative error is greater than 20 % for one or both downstream boundary conditions considered.

The response time along the channel reach

It is often useful to know the response time not only at the downstream end of the channel, but also at any intermediate position. The test canal has been used to compute the response time at 90 % using the different methods and for different intermediate positions. Figs. 7 and 8 show the results with the weir and the gate respectively.

Among the tested methods, the LBLR model is clearly the most accurate in terms of response time estimation all along the channel and for all values of α . The calculation of T_{Ank} is able to reproduce the evolution of $T_{SIC}^{(90)}$ all along the channel, but with less accuracy

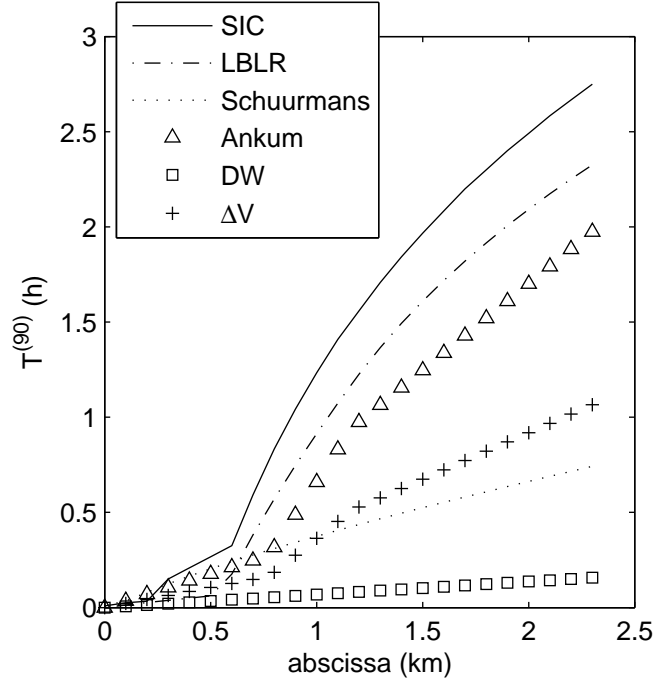


Fig. 8. Response time at 90 % all along the channel with a gate at the downstream end.

than with the LBLR model. $T_{Sch}^{(90)}$ is clearly not suitable to estimate the response time at any intermediate position, especially with a gate at the downstream end.

Validation on real data

The LBLR method is now applied to a real canal. The reach considered here is 4.9 km long. It is part of the Gignac canal, located north west of Montpellier. The design profile of the canal is prismatic, which was verified in 2000 by a field survey with 191 cross sections. The bottom slope is 0.000244 m/m, the bottom width is 0.73 m and the bank slope is 0.93 m/m. The Manning coefficient is 0.025, which corresponds to a rough concrete surface. Upstream discharge is controlled by a sluice gate. A weir is located at the downstream end. It is 10 m long and 1.1 m high.

The simulated event is a flow release of 100 L/s in October 2008 for an experiment described in Rabbani et al. (2009). The monitoring time step is 5 min. Fig. 9a shows the response at the downstream end to a step input. The solid line represents a fitted curve used to estimate the real response time.

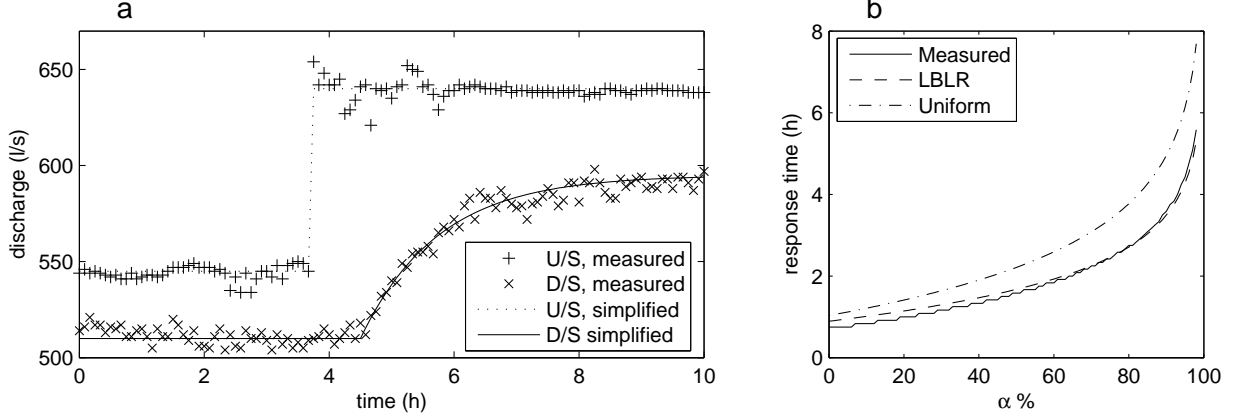


Fig. 9. Field measurements and response time approximation

Fig. 9b shows the response time $T^{(\alpha)}$ with respect to α . Measurements are compared with two approximations based on the LBLR method. For both approximations, characteristics of the equivalent canal are used. The first approximation assumes no downstream boundary condition (classical case of a semi-infinite channel) and the second one uses the characteristics of the weir to evaluate the downstream boundary condition.

Results clearly show that the LBLR method provides an accurate estimation of the response time. Besides, the weir at the downstream end significantly modifies the dynamics by introducing backwater and feedback effects. The LBLR model is able to take these effects into account.

Design Application

Effects of the downstream boundary condition on the response time

A design application is now presented. Considering the example canal described in Table 1, we analyze how the response time is affected by the weir length, the sill elevation or the gate opening. In this case, both Y_X and k may vary.

Fig. 10 and 11 show the relative response time at 90 % $T_{LBLR}^{(90)*}$ with respect to the relative downstream water depth ($Y_X^* = Y_X/Y_n$) and the relative feedback ($k^* = k/k_n$). k_n can be calculated using the Manning equation that describes a uniform flow. For each downstream boundary condition (Y_X, k) , $T_{LBLR}^{(90)}$ is normalized by the response time at 90 % corresponding

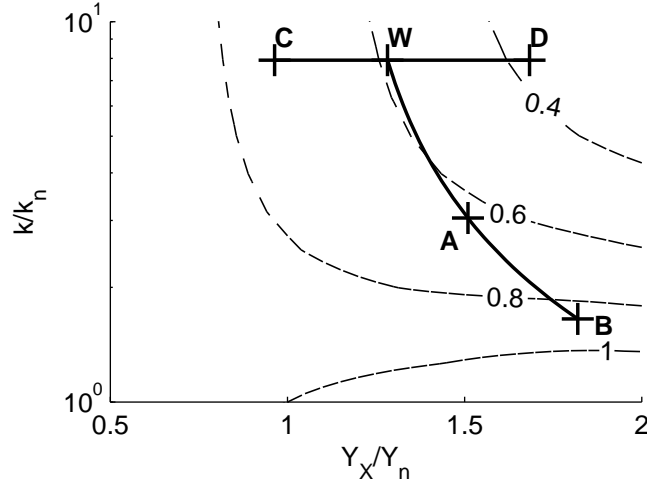


Fig. 10. Relative response time at 90% with respect to the relative downstream water depth Y_X^* and the relative feedback k^* with a weir at the downstream end.

to (Y_n, k_n) . Consequently, the uniform flow corresponds to $Y_X^* = 1$ and $k^* = 1$; at this point, the relative response time $T_{LBLR}^{(90)*}$ is equal to unity. Several points (W, G, A, B, C, D, E and F) have been added on these graphs to represent different downstream cross structures, defined in Table 2. Points W and G represent the weir and the gate previously defined, respectively.

Table 2. Characteristics of the different devices considered.

Point	Device	Characteristics
W	weir	height = 1.11 m, length = 21 m
A	weir	height = 1.11 m, length = 5 m
B	weir	height = 1.11 m, length = 2 m
C	weir	height = 0.8 m, length = 21 m
D	weir	height = 1.5 m, length = 21 m
G	gate	opening = 0.32 m
E	gate	opening = 0.4 m
F	gate	opening = 0.28 m

This application provides a tool which may help the designer to fix the characteristics of the downstream structure according to response time objectives. For instance, let us consider a weir at the downstream end (Fig. 10). Changing its length (points W, A and B) has an effect on the backwater and on the feedback. However, the effect on the response time is

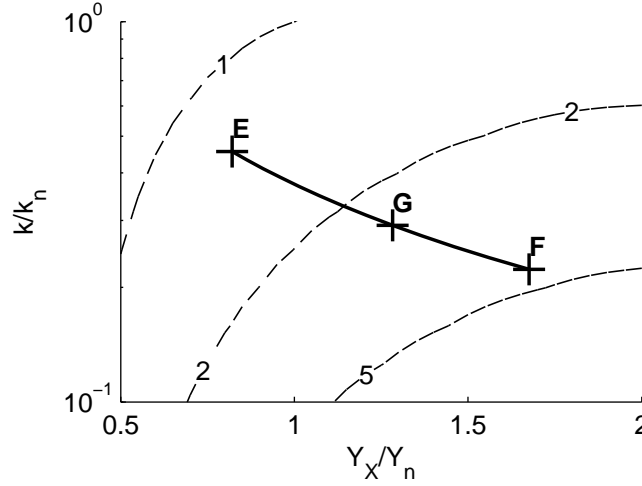


Fig. 11. Relative response time at 90% with respect to the relative downstream water depth Y_X^* and the relative feedback k^* with a gate at the downstream end.

rather limited ($T_{LBLR}^{(90)*}$ varies from about 0.6 to 0.9). On the contrary, if the sill elevation is doubled (point C to D), the response time is divided by 2. Concerning the gate (Fig. 11), increasing the opening (point F to E) leads to a significant decrease of the response time.

One may also remark that each modification of the cross structure characteristics has a different impact on the flow dynamics. For instance, an increase of the downstream water depth (and then of the volume of the reach) can be obtained by increasing the sill elevation (C to D), by decreasing the weir length (W to B) or by decreasing the gate opening (E to F). Yet, in the first case (C to D), the response time decreases, whereas it increases in the two other cases (W to B and E to F). Consequently, considering only the evolution of the downstream water depth is not sufficient to predict the evolution of the response time. It is essential to take the feedback effect into account, as well as the backwater effect.

Influence of the reference discharge

The last presented application concerns operation on irrigation canals. For management purposes, it is common to maintain the downstream water level at a specified value, which may be done by manipulating a gate at the downstream end of the reach.

In this application, the previous canal is considered with a gate at the downstream end. The downstream water depth is set to 1 m, which is the normal depth corresponding to a

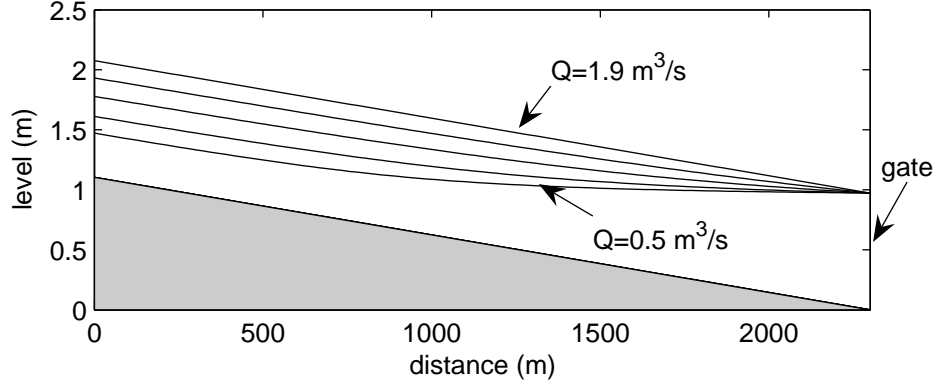


Fig. 12. Backwater curve for the different discharges.

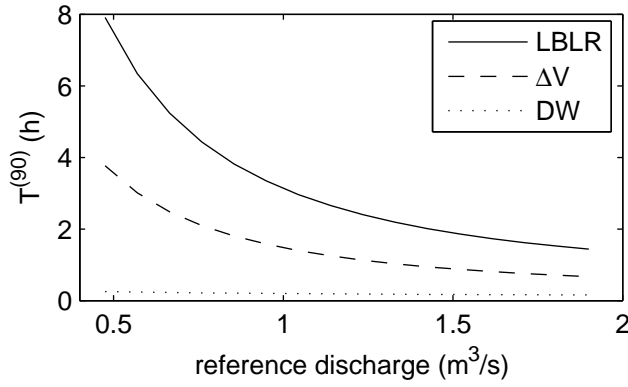


Fig. 13. Response time at 90% with respect to the reference discharge with a fixed downstream water level.

discharge of $1.9 \text{ m}^3/\text{s}$. Then, we decrease the reference discharge from $1.9 \text{ m}^3/\text{s}$ to $0.5 \text{ m}^3/\text{s}$. The gate opening is calculated for each discharge in order to maintain Y_X equal to 1 m. Fig. 12 represents the backwater curves for the different reference discharges. The method presented previously is then used to compute the response time at 90 % for each discharge (see Fig. 13). T_{DW} and $T_{\Delta V}$ are also represented for comparison.

Results show that the response time may vary a lot according to the reference discharge. This kind of graph may be directly used for manual operations on an irrigation canal, in order to manage upstream releases according to the flow conditions and to the characteristics of the hydraulic cross structure.

Conclusions

This paper proposed a clarified description of the response-time of an irrigation canal. In particular, the difference between the response time, the travel time and the rising time has been pointed out. We presented a new method to estimate the response time. It is based on a physical approximation of the flow dynamics and allows to compute quickly the response time anywhere in the channel. The method takes the effects of a downstream cross structure into account, including the feedback effects as well as the backwater effects. It has been shown in this paper that both effects may have a large impact on the response time.

This new method can be used for feed-forward control problems, or for canal network management. For instance, it may help the canal designer to choose suitable characteristics of the downstream hydraulic structure according to the management objectives, when expressed as constraints on the response time. Finally, the method allows the manager of an irrigation canal to quickly estimate the response time according the reference discharge when a local controller is used to maintain the downstream water depth at a specified value.

Acknowledgments

This work was jointly supported by Region Languedoc Roussillon and Cemagref within the PhD thesis of Simon Munier, under the supervision of X. Litrico and G. Belaud.

Notation

The following symbols are used in this paper:

A	=	wetted area (m^2)
B	=	channel width (m)
C	=	wave celerity (ms^{-1})
F	=	Froude number
g	=	gravitational acceleration (ms^{-2})
k	=	feedback coefficient (m^2s^{-1})
k^*	=	normalized feedback coefficient (m^2s^{-1})
k_n	=	feedback coefficient for the normal flow (m^2s^{-1})
m	=	bank slope
n	=	Manning coefficient ($\text{sm}^{-1/3}$)
Q_0	=	reference discharge (m^3s^{-1})
q	=	discharge variations (m^3s^{-1})
S_b	=	bottom slope
S_f	=	friction slope
t	=	time (s)
T	=	top width (m)
$T^{(\alpha)}$	=	response time at α % (s)
V	=	flow velocity (ms^{-1})
x	=	longitudinal abscissa (m)
X	=	channel length (m)
Y	=	water depth (m)
y	=	water depth variations (m)
Y_n	=	normal depth (m)
Y_X	=	downstream water depth (m)
Y_X^*	=	normalized downstream water depth (m)
τ, K	=	parameters of the LBLR model (s)
$\Delta\mathcal{V}$	=	dynamic storage (m^3)

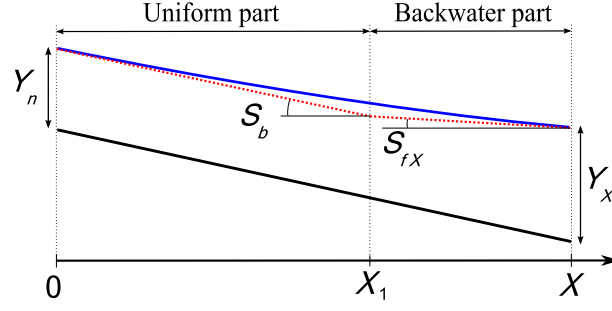


Fig. 14. Canal pool decomposition: uniform and backwater parts for the backwater curve approximation.

Appendix I. Transfer function in the frequency domain

Munier et al. (2008) linearized the Saint-Venant equations and used a backwater approximation to obtain the transfer function $TF(x, s)$ in the Laplace domain:

$$q(x, s) = TF(x, s)q(0, s) \quad (9)$$

where the Laplace variable is denoted s .

The backwater approximation consists in decomposing the channel into two sub-pools: a uniform part upstream and a backwater part downstream, designated by subscripts 1 and 2 respectively. The backwater curve is approximated by a straight line in each sub-pool. The abscissa of the separation between the two parts is denoted X_1 and defined as shown on Fig. 14. The slope S_X of the backwater curve at the downstream end is given by:

$$S_X = \left. \frac{dY}{dx} \right|_X = \frac{S_b - S_{fX}}{1 - F_X^2} \quad (10)$$

where S_{fX} is the friction slope and F_X the Froude number, calculated at the downstream end of the reach ($x = X$).

The downstream boundary condition is given by the couple (Y_X, k) , where Y_X is the downstream water depth and k the feedback coefficient. The decomposition is determined using the characteristics of the channel and Y_X , and leads to the length X_i and the mean water depth Y_i for each sub-pool ($i = 1, 2$). Knowing Y_i , each of the following variables can

be computed for each sub-pool: T_i , P_i , A_i , V_i , C_i and κ_i , $i = 1, 2$, where T is the top width (m), P the wetted perimeter (m), A the wetted area (m²), $V = Q_0/A$ the mean velocity (ms⁻¹), $C = \sqrt{gA/T}$ the wave celerity and κ is a parameter defined as below:

$$\kappa = \frac{7}{3} - \frac{4}{3} \frac{A}{TP} \frac{\partial P}{\partial Y} \quad (11)$$

We define, for $i = 1, 2$:

$$\lambda_{i1} = a_i + b_i s - \sqrt{a_i^2 + 2a_i c_i s + (2a_i d_i + c_i^2) s^2} \quad (12)$$

$$\lambda_{i2} = a_i + b_i s + \sqrt{a_i^2 + 2a_i c_i s + (2a_i d_i + c_i^2) s^2} \quad (13)$$

with $a_i = \frac{gS_b(1+\kappa_i)}{2(C_i^2 - V_i^2)}$, $b_i = \frac{V_i}{C_i^2 - V_i^2}$, $c_i = \frac{V_i}{C_i^2 - V_i^2} + \frac{2}{V_i(1+\kappa_i)}$, $d_i = \frac{1}{2a_i} \left(\frac{C_i^2}{(C_i^2 - V_i^2)^2} - c_i^2 \right)$.

We also define:

$$\rho_i = \frac{k_i \lambda_{i1} + T_i s}{k_i \lambda_{i2} + T_i s} \quad (14)$$

with $k_1 = -T_2 s \frac{1 - \rho_2 e^{(\lambda_{21} - \lambda_{22})X_2}}{\lambda_{21} - \lambda_{22} \rho_2 e^{(\lambda_{21} - \lambda_{22})X_2}}$ and $k_2 = k$.

Under these assumptions and given the upstream discharge, the discharge at any position can be obtained using the Saint-Venant transfer function:

$$TF(x, s) = \begin{cases} \frac{1 - \rho_1 e^{(\lambda_{11} - \lambda_{12})(X_1 - x)}}{1 - \rho_1 e^{(\lambda_{11} - \lambda_{12})X_1}} e^{\lambda_{11} x} & \text{if } x \leq X_1 \\ \frac{(1 - \rho_1) e^{\lambda_{11} X_1}}{1 - \rho_1 e^{(\lambda_{11} - \lambda_{12})X_1}} \frac{1 - \rho_2 e^{(\lambda_{21} - \lambda_{22})(X_2 - (x - X_1))}}{1 - \rho_2 e^{(\lambda_{21} - \lambda_{22})X_2}} e^{\lambda_{21}(x - X_1)} & \text{if } x > X_1 \end{cases} \quad (15)$$

The expression of the Saint-Venant transfer function is generally too complex to be easily inverted back to the time domain explicitly, so an approximation is required to get the response in the time domain. To that purpose, the classical moment matching method (Dooge et al. 1987; Munier et al. 2008) is used to derive an approximate first-order-with-

delay model for flow routing (Eq. (16)).

$$\widetilde{TF}(x, s) = \frac{G(x)e^{-\tau(x)s}}{1 + K(x)s} \quad (16)$$

The purpose of the moment matching method is to match the moments of the exact transfer function $TF(x, s)$ to those of the approximate one $\widetilde{TF}(x, s)$, which ensures a good representation for the low frequency range. To obtain the first three moments of the exact transfer function, the Taylor series expansion of $TF(x, s)$ is first computed, leading to:

$$TF(x, s) = A(x) + B(x)s + C(x)s^2 + o(s^2) \quad (17)$$

Details of the computation are given in appendix II.

One may note that, according to the continuity equation, the coefficient $A(x)$ is equal to unity, which leads to $G(x) = 1$.

Then the moment matching method leads to the following system:

$$K(x) = \sqrt{2C(x) - B(x)^2} \quad (18)$$

$$\tau(x) = -B(x) - \sqrt{2C(x) - B(x)^2} \quad (19)$$

This method provides a low frequency approximation of the flow transfer and leads to an analytical and distributed expression of the model parameters. The time delay $\tau(x)$ and the time constant $K(x)$ are obtained as analytical functions of the feedback coefficient k and the physical parameters of the pool (geometry, friction, discharge, downstream water depth).

According to Eq. (16), the output $q(x, t)$ for a step input is:

$$q(x, t) = (1 - e^{-\frac{t - \tau(x)}{K(x)}}) \quad (20)$$

This expression allows us to easily compute the response time.

Appendix II. Taylor Series of the Saint-Venant Transfer Function

The moment matching method is used to approximate the transfer function by a first-order-plus-delay. To apply this method, we compute the Taylor series of the transfer function.

$$\rho_i = B_{\rho i}s + C_{\rho i}s^2 + o(s^2) \quad (21)$$

$$\begin{aligned} B_{\rho i} &= \frac{(b_i - c_i)A_{ki} + T_i}{2a_i A_{ki}} \\ C_{\rho i} &= \frac{-1}{2a_i A_{ki}} \left[d_i A_{ki} + \frac{1}{2a_i A_{ki}} ((b_i + c_i)A_{ki} + T_i)((b_i - c_i)A_{ki} + T_i) + T_i \frac{B_{ki}}{A_{ki}} \right] \\ &\text{with} \end{aligned}$$

$$k_1 = A_{k1} + B_{k1}s + o(s) \quad (22)$$

$$\begin{aligned} A_{k1} &= \frac{k}{1 - \left(1 + k \frac{b_2 - c_2}{T_2}\right) (1 - e^{-2a_2 X_2})} \\ B_{k1} &= \frac{-A_{k1}^2}{T_2} \left[d_2 + \left(2c_2 B_{\rho 2} + 2a_2 \left(C_{\rho 2} - 2c_2 X_2 B_{\rho 2} + B_{\rho 2}^2 e^{-2a_2 X_2}\right)\right) e^{-2a_2 X_2} \right] \end{aligned}$$

$$k_2 = A_{k2} + B_{k2}s \quad (23)$$

$$A_{k2} = k$$

$$B_{k2} = 0$$

For each sub-pool ($i = 1..2$), we define $Z_i(x)$ and $TF_{i0}(x)$ as following:

$$Z_i(x) = \frac{1 - \rho_i e^{(\lambda_{i1} - \lambda_{i2})(X_i - x)}}{1 - \rho_i e^{(\lambda_{i1} - \lambda_{i2})X_i}} = 1 + B_{Zi}(x)s + C_{Zi}(x)s^2 + o(s^2) \quad (24)$$

$$\begin{aligned} B_{Zi}(x) &= -B_{\rho i}(1 - e^{-2a_i x})e^{-2a_i(X_i - x)} \\ C_{Zi}(x) &= -\left[(C_{\rho i} - 2B_{\rho i}c_i X_i + B_{\rho i}^2 e^{-2a_i X_i})(1 - e^{-2a_i x}) + 2B_{\rho i}c_i x\right] e^{-2a_i(X_i - x)} \end{aligned}$$

$$TF_{i0}(x) = Z_i(x)e^{\lambda_{i1}x} = 1 + B_{i0}(x)s + C_{i0}(x)s^2 + o(s^2) \quad (25)$$

$$B_{i0}(x) = (b_i - c_i)x + B_{Zi}(x)$$

$$C_{i0}(x) = (b_i - c_i)^2 \frac{x^2}{2} - d_i x + (b_i - c_i)x B_{Zi}(x) + C_{Zi}(x)$$

if $x < X_1$

$$TF(x, s) = TF_{10}(x) = 1 + B(x)s + C(x)s^2 + o(s^2) \quad (26)$$

$$B(x) = B_{10}(x)$$

$$C(x) = C_{10}(x)$$

if $x > X_1$

$$TF(x, s) = TF_{10}(X_1)TF_{20}(x - X_1) = 1 + B(x)s + C(x)s^2 + o(s^2) \quad (27)$$

$$B(x) = B_{10}(X_1) + B_{20}(x - X_1)$$

$$C(x) = C_{10}(X_1) + B_{10}(X_1)B_{20}(x - X_1) + C_{20}(x - X_1)$$

The two parameters $\tau(x)$ and $K(x)$ of the first-order-with-delay are obtained by:

$$K(x) = \sqrt{2C(x) - B(x)^2} \quad (28)$$

$$\tau(x) = -B(x) - \sqrt{2C(x) - B(x)^2} \quad (29)$$

References

- Ankum, P. (1995). *Flow Control in Irrigation and Drainage*. IHE Delft. The Netherlands.
- Baume, J.-P., Malaterre, P.-O., Belaud, G., and Le Guennec, B. (2005). “SIC: a 1D hydrodynamic model for river and irrigation canal modeling and regulation.” *Métodos Numéricos em Recursos Hídricos*, 7, 1–81.
- Bautista, E. and Clemmens, A. J. (1999). “Computerized anticipatory control of irrigation delivery systems.” *Workshop on Modernization of Irrigation Water Delivery Systems, U.S. Committee on Irrigation and Drainage (USCID)*, Phoenix, Arizona. 359–373.
- Burt, C. M. and Plusquellec, H. L. (1990). “Water delivery control.” *Management of Farm Irrigation Systems. American Society of Agricultural Engineers, St. Joseph, MI.*, 373–423.

- Dooge, J., Napiórkowski, J., and Strupczewski, W. (1987). “Properties of the generalized downstream channel response.” *Acta Geophysica Polonica*, 35(4), 405–418.
- Litrico, X. and Fromion, V. (2004a). “Frequency modeling of open-channel flow.” *Journal of Hydraulic Engineering*, 130(8), 806–815.
- Litrico, X. and Fromion, V. (2004b). “Simplified modeling of irrigation canals for controller design.” *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 130(5), 373–383.
- Munier, S., Litrico, X., Belaud, G., and Malaterre, P.-O. (2008). “Distributed approximation of open-channel flow routing accounting for backwater effects.” *Advances in Water Resources*, 31(12), 1590–1602.
- Munier, S. (2009). “Modélisation intégrée des écoulements pour la gestion en temps réel d’un bassin versant anthropisé.” *PhD thesis, AgroParisTech*.
- Rabbani, T., Munier, S., Dorchie, D., Malaterre, P.-O., Bayen, A., and Litrico, X. (2009). “Flatness-based control of open-channel flow in an irrigation canal using SCADA.” *IEEE Control Systems Magazine*, 29, 22–30.
- Schuurmans, J., Bosgra, O., and Brouwer, R. (1995). “Open-channel flow model approximation for controller design.” *Applied Mathematical Modelling*, 19(9), 525–530.
- Schuurmans, W. (1990). “Analytical formulae for the response time of irrigation canals.” *Irrigation and Drainage Systems*, 4(1), 37–58.
- Strelkoff, T. S., Deltour, J. L., Burt, C. M., Clemmens, A. J., and Baume, J. P. (1998). “Influence of canal geometry and dynamics on controllability.” *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 124(1), 16–22.